Principio di relatività e simmetrie nel paradigma del campo e delle particelle: il caso dell'effetto Doppler.*

Pietro Di Mauro

* *Comunicazione XCI Congresso Nazionale SIF, Catania 2005.*

Abstract: One of ideas which seems that it is travelled unhurt of classical physics to the modern physics is the principle of relativity, the absolute equivalence of all inertial frame of reference. And yet for the Doppler effect, with mechanical wave, in the field paradigm, seems that it is "the possibility of inadmissible absolute remarks". Are analysed the implications of such principle, on account of symmetries believed coercive in the elaborate paradigms, and the results, supposed exact, provided with restricted relativity in contrast with one another of alternative theories.

Il principio di relatività o, come dicono altri, postulato di relatività, pare sia una delle poche idee che, pur con qualche precisazione, continua a ritenersi valida anche nella fisica relativistica e quantistica. Sembra, anzi, che da tale principio è possibile ricavare una serie di proprietà della natura difficilmente deducibili senza supporre la sua validità: la relatività ristretta, si dice spesso, è un esempio di tale asserto.

Quasi tutti sono concordi nel ritenere che tale principio debba enunciarsi in questo modo: tutte le leggi sono le stesse nei sistemi inerziali, cioè se le leggi meccaniche sono valide per un sistema di riferimento esse lo sono per qualsiasi altro che si muove di moto uniforme relativamente al primo. Einstein nel suo articolo del 1905 lo enuncia così: "*Dati due sistemi di coordinate in moto relativo traslatorio parallelo e uniforme, le leggi secondo cui si modificano gli stati di un sistema fisico non dipendono dal fatto che questi cambiamenti vengano riferiti all'uno o all'altro dei due sistemi*"[1].

Abbiamo più volte commentato l'enunciato fatto da Einstein di tale principio[2] notando come, di fatto, non viene utilizzato dallo stesso per la determinazione delle trasformazioni di Lorentz e come la sua formulazione è resa ambigua dal fatto che non chiarisce mai, in tutto il suo famoso scritto del 1905, cosa si debba intendere per "legge fisica".

Normalmente tale principio viene attribuito a Galilei e considerato uno dei principi fondamentali di tutta la meccanica di Galilei e Newton, quasi sempre chiamata, tout court, fisica classica. Ma, così come è stato enunciato, per tale principio bisogna prima definire i sistemi di riferimento e in particolare quelli che si muovono di moto traslatorio uniforme, cosiddetti inerziali. Né Galilei, né Newton introducono i sistemi di riferimento e tanto meno il principio di relatività com'è inteso oggi. Questi sono invenzioni di Eulero e Lagrange che sono i veri "padri" di quella che usualmente viene chiamata meccanica classica (quella studiata sotto questo nome in ogni ordine e grado di scuola). E' assodato per noi, infatti, come più volte scritto, che ciò che viene chiamata meccanica classica sia la meccanica nella versione di Eulero e Lagrange e non di Galilei e Newton!

A tal proposito, scrive Notarrigo[3]: "*Tali esposizioni della meccanica classica, poiché assumono un riferimento "assoluto", inteso come indipendente dalla materia circostante e in "quiete assoluta"(?!), hanno la necessità di supporre che tale sistema di riferimento debba essere inerziale; ma naturalmente, si scontrano con la difficoltà di individuare tale sistema inerziale (questo vale anche per la teoria della relatività). Alcuni si limitano a dire che è inerziale un sistema di riferimento in cui valgono le leggi di Newton, ma poi aggiungono che tali leggi valgono solo in*

[1] A.Einstein: "*Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento*" in "*L'anno memorabile di Einstein*" a cura di J. Stachel, Ed. Dedalo, Bari, 2001, p.137.
[2] cfr. P. Di Mauro, "*Le trasformazioni di Lorentz e la relatività ristretta*", Mondotre – La Scuola Italica, Anno 1, numero 1, dic. 1999, p.p.15 – 26.
[3] S. Notarrigo: "*Alice nel mondo della realtà*", non pubblicato

un sistema inerziale, creando così un circolo vizioso! Per non menzionare il fatto che con la locuzione "leggi di Newton", si intendono cose assolutamente lontane dalle idee di Newton…Altri dicono che un sistema è inerziale se si muove di moto traslatorio uniforme rispetto al sistema delle stelle fisse; ma siccome tale sistema tale sistema non può essere inerziale, quando si assuma un'interazione universale tra i corpi, si è costretti ad aggiungere che lo è solo approssimativamente. Quanto buona sia tale approssimazione e per quali sistemi di forze essa valga non si è in grado di dirlo, specialmente quando si assuma, come nella teoria della relatività ristretta, che tutti gli osservatori siano equivalenti…Del resto Newton ha fondato la sua teoria senza che mai gli balenasse l'idea che tale inconoscibile ente potesse servire a qualcosa, visto che mai lo menziona!

Tale principio, tuttavia, viene da tutti attribuito a Galilei, interpretando il famoso passo del "*Dialogo sopra i massimi sistemi del mondo*", che qui riportiamo.

« *Riserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coverta di alcun gran navilio, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti; siavi anco un gran vaso d'acqua, e dentrovi de' pescetti; sospendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vadia versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca, che sia posto a basso: e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animaletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza; i pesci si vedranno andar notando indifferentemente per tutti i versi; le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto; e voi, gettando all'amico alcuna cosa, non piú gagliardamente la dovrete gettare verso quella parte che verso questa, quando le lontananze sieno eguali; e saltando voi, come si dice, a piè giunti, eguali spazii passerete verso tutte le parti. Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benché niun dubbio ci sia che mentre il vassello sta fermo non debbano succeder cosí, fate muover la nave con quanta si voglia velocità; ché (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, né da alcuno di quelli potrete comprender se la nave cammina o pure sta ferma: voi saltando passerete nel tavolato i medesimi spazii che prima né, perché la nave si muova velocissimamente, farete maggior salti verso la poppa che verso la prua, benché, nel tempo che voi state in aria, il tavolato sottopostovi scorra verso la parte contraria al vostro salto; e gettando alcuna cosa al compagno, non con piú forza bisognerà tirarla, per arrivarlo, se egli sarà verso la prua e voi verso poppa, che se voi fuste situati per l'opposito; le gocciole cadranno come prima nel vaso inferiore, senza caderne pur una verso poppa, benché, mentre la gocciola è per aria, la nave scorra molti palmi; i pesci nella lor acqua non con piú fatica noteranno verso la precedente che verso la sussequente parte del vaso, ma con pari agevolezza verranno al cibo posto su qualsivoglia luogo dell'orlo del vaso; e finalmente le farfalle e le mosche continueranno i lor voli indifferentemente verso tutte le parti, né mai accaderà che si riduchino verso la parete che riguarda la poppa, quasi che fussero stracche in tener dietro al veloce corso della nave, dalla quale per lungo tempo, trattenendosi per aria, saranno state separate...* »[4].

Per rimarcare il fatto che nessun esperimento fisico effettuato a bordo della nave o, con buona approssimazione, della terra, darà risultati diversi se la nave è ferma o in moto "*pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là*", Galilei ricorre all'esempio della nave[5] con dovizia di particolari, considerando la maggior parte dei possibili esperimenti che all'epoca era possibile effettuare. Chiaramente per Galilei le riflessioni sulla relatività del moto sono strettamente

---

[4] G. Galilei: "*Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*" , a cura di F. Brunetti – UTET, 1964, p. 236.

[5] La storia di questo esempio ha forse inizio in alcuni versi del *De rerum natura* di Lucrezio: "*la nave che ci trasporta e sembra restare immobile; / quella che è ferma all'ancora e sembra che ci oltrepassi*". Virgilio si serve di un'immagine analoga nell'Eneide, mentre Sesto Empirico riprende l'esempio della nave a più riprese, sia negli Schizzi pirroniani sia nel trattato contro i professori, per dimostrare la non esistenza del movimento. I fisici della cosiddetta scuola di Parigi, nel XIV secolo, Giovanni Buridano (il principale difensore della teoria dell'impetus) e Nicole Oresme, suo probabile allievo, si avvalgono dell'argomento della nave per pronunciarsi a favore dell'immobilità della Terra. Diversamente, Giordano Bruno nella Cena delle ceneri, un'opera che secondo alcuni studiosi avrebbe influenzato profondamente la genesi del Dialogo galileiano, ricorre all'esperimento ideale di osservare il moto di caduta di una pietra lanciata verso l'alto a bordo di una nave in movimento per propugnare la tesi copernicana.(cfr. Sparzani: "*Relatività, quante storie*", Bollati Boringhieri Scienze, Torino, 2003)

legate al problema di stabilire se la Terra è immobile al centro dell'universo, come pretendono la tradizione aristotelica e l'astronomia tolemaica, oppure, al contrario, dotata di un moto di rotazione giornaliero attorno al proprio asse e di un moto di rivoluzione annuale attorno al Sole.

Lo stesso Newton negli *Assiomi o Leggi del Movimento*, all'inizio dei suoi *Principia*, nel Corollario V alle tre leggi del moto[6], afferma: "*I moti relativi dei corpi inclusi in un dato spazio sono identici sia che quello spazio giaccia in quiete, sia che il medesimo si muova in linea retta senza moto circolare*". E continua: "*Infatti le differenze dei moti che tendono verso la stessa parte, e la somma di quelli che tendono verso parti contrarie, all'inizio (per ipotesi) sono le medesime in ambo i casi, e da queste somme o differenze nascono lo scontro e l'impulso con cui i corpi si urtano mutuamente. Quindi, per la II legge* [della dinamica], *gli effetti degli scontri saranno uguali in entrambi i casi, e perciò i moti fra loro nel primo caso rimarranno uguali ai moti fra loro nell'altro. Ciò viene provato da un chiaro esperimento. Su una nave, sia che essa stia in riposo, sia che si muova uniformemente in linea retta, tutti i movimenti avvengono nella stessa maniera*".

Non è possibile dunque, stando alle argomentazioni di Galilei e Newton, poter misurare, con esperimenti fatti sulla nave, il moto assoluto della nave rispetto alla terra, e quindi anche della terra rispetto al sole (o al sistema delle stelle fisse).

Alcuni sostengono che il principio di relatività vada enunciato solo in questa forma, detta weak relativity: è impossibile, con esperienze fatte sulla terra, poterne misurare la velocità assoluta[7]. E ciò per distinguerlo da quello che invece è inteso da tutti come principio di relatività, detto strong relativity: le leggi della fisica sono esattamente le stesse (hanno la stessa forma?!) in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Cioè così come l'ha enunciato Einstein.

Bunge, lo introduce, solo in vista della relatività, in questo modo: "*Le leggi fondamentali della fisica devono essere le stesse in (relative a) tutti i sistemi di riferimento inerziali" – dove 'inerziale' vuol dire "tale che sono soddisfatte in esso le equazioni di Maxwell*" o anche: "*Un sistema è chiamato inerziale se tutti i raggi di luce si propagano nel vuoto lungo linee rette relativamente ad esso*".[8] Ma subito è costretto a fare alcune precisazioni: "*In the building of SR (Special Relativity) the principle of relativity played an important heuristic role: it did not entail SR but it did help weed out all the basic statements that did not comply with it. Yet it is often regarded as a constitutive axiom of SR, although it evolves the metatheoretical concept of basic law statement. A source of this misunderstanding is that the principle is often misstated. A common misstatement is this: "The reference frame makes difference to physical events". This is false: we can always escape an unpleasant noise by riding a supersonic frame. The relativity refers to patterns, not to events: it is "a restriction principle for natural laws"* (Einstein, 1949). *Another common misstatement is this: "The results of any experiment performed in an inertial system are identical with those obtained in any other Galilean frame." In fact, experiments are a subset of facts, and facts are not frame-invariant. A fortiori, it is false that "Physics is the same for all observers". What is held is that the basic laws ought to hold no matter what the speed of reference frame may be, as long as, it is inertial. But nothing is said about observers, particularly when speaking about unobservable objects such as laws of nature, hence the operationalist interpretations of SR are a forgery. The principle of relativity is, in short, (a) a heuristic principle and (b) a metalaw statement – and a normative one not a declarative metanomological statement for it does not say what is but what ought to be the case* (Bunge, 1961b)".[9]

Cercando di mettere insieme alcune cose dette è possibile enunciare il principio di relatività (galileiana) affermando l'equivalenza fisica di tutti i sistemi di riferimento che si muovono di moto traslatorio uniforme, nel senso che ciascun osservatore di un sistema di riferimento usa, o scopre, leggi uguali o della stessa forma degli altri, e che nessun esperimento eseguito all'interno di un dato

[6] I. Newton: "*Principi Matematici della Filosofia naturale*" a cura di A. Pala, UTET (To), 1965, p. 128 – 129.
[7] cfr. F. Selleri: "*The inertial transformations and the relativity principle*" in print on *Found. Phys. Lett*. (2005)
[8] cfr. M. Bunge: "*Foundations of Physics*" – Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1967, pp.182 – 183
[9] cfr. M. Bunge, *ibidem*, p. 183.

sistema di riferimento può evidenziarne l'eventuale moto rettilineo ed uniforme rispetto a qualche altro sistema.

Succede, però, che all'interno della meccanica classica vi è un esperimento, un effetto, per il quale sembrerebbe non potersi applicare tale principio: l'effetto Doppler.

Ipotizzato da J. C. Doppler nel 1842 (il suo lavoro porta il titolo "*Sulla luce colorata delle stelle doppie e di qualche altro astro celeste*"), nel 1845 ebbe una prima verifica sperimentale con gli esperimenti di Buys Ballot, il quale, peraltro, aveva previsto lui stesso tale effetto, per le onde acustiche. Nel 1848 con Fizeau e successivamente nel 1868 ad opera di W. Huggins si considerò l'effetto verificato sperimentalmente anche per la luce.

Nel caso delle onde meccaniche (p.es. sonore), l'effetto Doppler viene trattato in tutti i manuali di fisica distinguendo due casi:

1. Sorgente (*S*) ferma ed osservatore (*O*) in moto, rispetto ad un osservatore assoluto, privilegiato (quello rispetto al quale si misura la velocità dell'onda), per il quale si ha $\lambda \cdot \nu = c$ e $\nu' \cdot \lambda = c' = c \pm v_O$ (utilizziamo la stessa lettera *c* per la velocità [di gruppo, di fase, di segnale!?] di qualsiasi onda)
2. Sorgente (*S*) in moto, sempre rispetto allo stesso osservatore privilegiato di prima, ed osservatore (*O*) fermo per il quale si ha: $\lambda \cdot \nu = c$ e $\nu' \cdot \lambda' = c$ con $\nu \cdot \lambda' = c' = c \pm v_S$.

Cioè, nel caso 1 cambia ν e *c* ma non λ, mentre nel caso 2 cambiano ν, λ e *c*, anche se si pone $\nu' \cdot \lambda' = c$. In entrambi i casi si utilizza la formula di addizione delle velocità (data dalle cosiddette trasformazioni di Galilei).

Nella teoria data per l'effetto Doppler, dunque, bisogna distinguere i due casi; quando è la sorgente a muoversi, per esempio, sembrerebbe che questa non modifichi la velocità dell'onda che emette ma comprime o rarefa solo le onde. Non si considerano, però, le eventuali interazioni della sorgente o del rilevatore con il mezzo in cui si propaga l'onda. Inoltre, le velocità dei due, sorgente e osservatore, vengono sempre riferite a un osservatore esterno ai due, una sorta di osservatore assoluto!

Per i due casi si ottengono le formule, come riportate da tutti i libri:

1. *S* ferma, *O* in moto (con velocità $\pm v_O$), rispetto ad un osservatore assoluto :

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \nu' = \frac{c \pm v_O}{\lambda} = \frac{c}{\lambda}\left(1 \pm \frac{v_O}{c}\right) = \nu\left(1 \pm \frac{v_O}{c}\right).$$

2. *S* in moto (con velocità $\pm v_S$), *O* fermo rispetto a un osservatore assoluto:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \nu' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{\dfrac{c \mp v_S}{\nu}} = \nu\left(\frac{c}{c \mp v_S}\right) = \nu\left(\frac{1}{1 \mp \dfrac{v_S}{c}}\right).$$

I due casi sono distinguibili perché si hanno formule diverse:

1) $$\nu' = \nu\left(1 \pm \frac{v_O}{c}\right)$$ per il primo caso,

2) $$\nu' = \nu\left(\frac{1}{1 \mp \dfrac{v_S}{c}}\right)$$ per il secondo.

Vi è, dunque, differenza tra il caso in cui l'osservatore viaggi in una direzione con velocità *v* e quello in cui la sorgente si muova anche con la stessa velocità in verso opposto.

Le due frequenze sono, in generale, diverse anche se, praticamente, la loro differenza potrebbe essere trascurabile (se si trascurano anche le quantità del secondo ordine in $\beta = \frac{v}{c}$).

I due casi risulteranno indistinguibili (si misurerà la stessa frequenza) solo se si ha $1 \pm \frac{v_O}{c} = \frac{1}{1 \mp \frac{v_S}{c}}$ solo, cioè, nel caso in cui o $v_O = \frac{v_S}{1 \mp \frac{v_S}{c}}$ (si leggerà il segno – per $+v_S$, allontanamento tra osservatore e sorgente, e il segno + per $-v_S$, avvicinamento tra sorgente e osservatore) oppure $v_S = \frac{v_O}{1 \pm \frac{v_O}{c}}$ (si leggerà il segno + per $+v_O$, avvicinamento tra sorgente e osservatore, e il segno – per $-v_O$, allontanamento tra sorgente e osservatore). Le formule in generale sono: $v_O = \frac{\pm v_S}{\pm 1 - \frac{v_s}{c}}$ e $v_S = \frac{\pm v_O}{\pm 1 + \frac{v_O}{c}}$.

In tutti gli altri casi sarà sempre possibile stabilire se è la sorgente in moto o l'osservatore, rispetto al sistema del mezzo, quello in cui si è misurata la c, con buona pace del principio di relatività! Secondo questo modello, l'effetto Doppler non sarebbe simmetrico (il moto della sorgente verso il rilevatore è "fisicamente" diverso dal moto del rilevatore verso la sorgente!) e, dunque, sarebbe possibile stabilire lo stato di moto di un corpo in modo assoluto (nel senso galileiano del passo prima citato) sfruttando la asimmetria trovata, come fatto notare, tra gli altri, da Straneo: "*La formula contiene, oltre una imprecisione del secondo ordine in* v/c *,anche l'indicazione che non è indifferente che consideri l'osservatore in moto in un verso, oppure la sorgente nell'altro, con la stessa velocità; essa non è quindi dipendente dal solo moto relativo, ma dà persino la possibilità di inammissibili considerazioni assolute…*"[10]. E qualcuno sostiene anche che nell'effetto Doppler (per esempio, secondo la teoria dell'etere) il principio di relatività non debba valere rigorosamente ma solo approssimativamente, poiché i corpi emettono e assorbono luce.

La possibilità, però, di osservare e misurare lo stato di moto di un corpo rispetto ad un altro e rispetto a un osservatore assoluto (come si diceva una volta, rispetto all'etere) è legata al fatto che la differenza è del secondo ordine rispetto a β e quindi, spesso, troppo piccola per poter essere misurata.

Se si muovessero entrambi, sorgente (con v_S) e osservatore (con v_O), con la sorgente di frequenza propria ν si ha: $\nu' = \nu \frac{1 \pm \frac{v_O}{c}}{1 \mp \frac{v_S}{c}}$.

L'effetto Doppler dipende esclusivamente dal moto relativo fra sorgente e osservatore, dalla velocità relativa tra S e O; si verifica non appena v_S e v_O differiscono tra loro e dipende, quindi, dalla velocità relativa V tra S e O, cioè dalla differenza $V = |v_S - v_O|$.

Ma, per come sono state ricavate le formule, ha senso parlare di sorgente ferma (rispetto a chi?!) e osservatore in moto (rispetto a chi!?)? Come è possibile sapere se è O a muoversi o S? Quale formula si deve usare? Non so se sono io osservatore a muovermi o è la sorgente a farlo. Si vede solo che la distanza tra S e O aumenta o diminuisce. Dunque, si hanno due formule a disposizione ma entrambe per un osservatore assoluto (fuori da S e O), quello rispetto al quale si determinano le velocità, che è poi quello che attribuisce le variazioni di frequenza ora all'uno ora all'altro!

---

[10] P. Straneo in "*Cinquant'anni di relatività*" (a cura di Pantaleo), Universitaria Editrice, Firenze, 1955, p. 94.

Bisognerebbe, allora, prima misurare la velocità dell'onda quando la distanza tra S e O resta invariata; poi misurare la velocità con la quale la distanza cresce o decresce, e infine applicare la formula trovata, in teoria, che deve essere unica data l'impossibilità di conoscere lo stato di un corpo rispetto a un altro.

Le due formule trovate si potrebbero, però, mettere in relazione tra loro, essendo l'una inversa dell'altra, dopo aver definito opportunamente i simboli in gioco.

Infatti, la prima equazione (quella per l'osservatore in moto e la sorgente ferma) $\nu' = \nu\left(1 \mp \frac{v}{c}\right)$ può scriversi anche $\nu = \nu' \frac{1}{1 \mp \frac{v}{c}}$ ed è formalmente la stessa del caso che la sorgente si muova e l'osservatore sia fermo ricordandosi, però, di cambiare i segni della velocità!

Si potrebbe interpretare la cosa in questo modo: nel primo caso la sorgente emette ν e il rivelatore osserva ν' (per il fatto che è in moto) data da $\nu' = \nu\left(1 \pm \frac{v}{c}\right)$; nel secondo caso la sorgente emette ν' (è la ν cambiata per il fatto che la sorgente è in moto) e l'osservatore (fermo) dice che la sorgente avrebbe ν se non fosse in moto data da $\nu = \nu' \frac{1}{1 \mp \frac{v}{c}}$.

Si potrebbe, cioè, considerare ν la frequenza propria della sorgente quando è ferma e ν' la nuova frequenza della sorgente in moto!

Ma tale interpretazione non elimina minimamente le considerazioni fatte prima sull'osservatore "assoluto" che ricava le due formule per il moto della sorgente e del rivelatore!

Normalmente la formula per l'effetto Doppler, della luce in fisica classica viene scritta in questo modo:

$$\nu' = \nu(1 \pm \beta \cos\varphi) \cong \frac{\nu}{1 \mp \beta \cos\varphi} \quad \text{(essendo } \varphi \text{ l'angolo formato tra } v \text{ e } c\text{)}$$

tentando di salvare il fatto che, praticamente, per piccoli valori di β le formule si possono confondere.

Nella maggior parte dei libri o degli articoli che trattano l'argomento[11] l'effetto Doppler viene ricavato, teoricamente, a partire dall'equazione dell'onda e imponendo che il numero d'onde che costituiscono un treno d'onde sia una quantità indipendente dal sistema di coordinate (quindi invariante). Si ricava la legge, l'equazione che regola l'effetto Doppler imponendo che il numero delle onde resti invariato per due osservatori che si muovono relativamente di moto uniforme, imponendo, in particolare, che sia invariante la fase dell'onda, spesso scritta come $kx - \omega t$, con *k* (coefficiente di *x*) = numero d'onda, ω (coefficiente di *t*) = frequenza angolare, e $c = \frac{\omega}{k}$ = velocità di fase dell'onda. Un osservatore in moto rispetto alla sorgente, però, conterà un numero di onde diverso nel tempo infatti è solo il numero complessivo delle onde a risultare invariato (non si ha creazione o distruzione di particelle per il fatto di essere in moto!) non la loro densità! La frequenza delle onde, la loro densità (il numero di onde nell'unità di tempo) dipenderà dallo stato di moto.

Questa è l'ipotesi forte che viene fatta per ricavare l'equazione dell'effetto Doppler! Il numero di onde (come particelle!?) non dipende dallo stato di moto del sistema di riferimento scelto per osservare il treno d'onde. Un osservatore in moto rispetto alla sorgente, però, conterà un numero di onde diverso nel tempo, dato che non è ovvio che il numero di onde che passano in un punto (x, t) nel tempo *t* in un sistema di riferimento sia uguale al numero di onde che passano nel

[11] Cfr, per esempio, M. Born: "*La sintesi einsteiniana*", Boringhieri (TO), 1969, pp. 151 – 161; C. Moller, "*The Theory of Relativity*" Oxford U.P., London, 1952, p. 6; E.L. Hill, "*Optics and Relativity Theory*", Ed. By E. U. Condon and H. Odshaw, in "Handbook of Physics" Vol. 1° - McGraw – Hill Book Co. N. Y., 1958, p. 6-152; R. P. Feynman, "*The Feynman Lectures on Physics*", Addison- Wesley Publishing Company, Inc. Caltech, 1963, Vol. I, 2, p. 34 – 10.

corrispondente punto (x', t') di un altro sistema di riferimento, in moto rispetto al primo, nel tempo $t = t'$. Infatti è solo il numero complessivo delle onde a risultare invariato (non si ha creazione o distruzione di particelle per il fatto di essere in moto!) non la loro densità! La frequenza delle onde, la loro densità (il numero di onde nell'unità di tempo) dipenderà dallo stato di moto.[12]

In questo modo sembra che l'invarianza della fase sia il prerequisito necessario per ottenere l'effetto Doppler e che sia derivabile considerando la fase solo un oggetto puramente matematico, una conseguenza puramente matematica, indipendente dalla associazione fisica che si fa. Al massimo si può considerare un effetto puramente cinematico, come si fa sempre, visto che non viene fatto alcun cenno alle interazioni dell'onda con il mezzo in cui si propaga e di questo con la sorgente e il rilevatore e il loro stato di moto, prima e dopo l'emissione o l'assorbimento dell'onda.

In generale se l'equazione di un'onda con la notazione vettoriale si scrive: $\Psi = \Psi_0 \exp\left[i\omega\left(t - \frac{n \cdot r}{c}\right)\right] = \Psi_0 \exp i\Phi$ con $\Phi = \omega\left(t - \frac{n \cdot r}{c}\right)$ (essendo n = vettore unitario normale al fronte d'onda) sostituendo le trasformazioni di Galilei, anch'esse scritte in forma vettoriale, $\begin{cases} r = r' + vt \\ t = t' \end{cases}$, si ottiene $\Phi = \omega'\left(t' - \frac{n \cdot r'}{c'}\right)$ con $\omega' = \omega\left(1 - \frac{n \cdot v}{c}\right)$ e $c' = c - n \cdot v$. La prima di queste è l'equazione classica per l'effetto Doppler, come detto prima, cioè la formula nel caso della sorgente ferma e l'osservatore in moto. E questa è l'unica che si può ricavare in questo modo, non possono esistere altre formule per tutti i tipi di onde!

Nel suo famoso articolo del 1905, Einstein applica lo stesso procedimento per ricavare quella che lui considera la formula esatta per l'effetto Doppler. Usando al posto delle trasformazioni di Galilei le nuove trasformazioni di Lorentz[13] (le scriviamo anch'esse nella forma vettoriale) $\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \gamma \vec{v} t' + \frac{\gamma - 1}{v^2}\vec{v}\left(\vec{r}' \cdot \vec{v}\right) \\ t = \gamma\left(t' + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{v}}{c^2}\right) \end{cases}$. Da $\Phi = \omega\left(t - \frac{n \cdot r}{c}\right)$. imponendo $\frac{\omega}{k} = \frac{\omega'}{k'} = c$, si ha

$$\vec{n}' = \frac{\vec{n} - \gamma \frac{v}{c} + \frac{\gamma - 1}{v^2}\left(\vec{n} \cdot \vec{v}\right)\vec{v}}{\gamma\left(1 - \frac{n \cdot v}{c}\right)} \quad \text{e} \quad \omega' = \gamma\omega\left(1 - \frac{n \cdot v}{c}\right),$$

e quest'ultima è la formula relativistica per l'effetto Doppler[14]. "*Dall'equazione per* ω' *segue che se un osservatore si muove con velocità v relativamente a una sorgente di luce infinitamente distante di frequenza* ν, *in modo che la congiungente <<sorgente di luce – osservatore>> formi un angolo* φ *con la velocità dell'osservatore riferita a un sistema di coordinate in quiete rispetto alla sorgente, allora la*

---

[12] Cfr. B. Ram : "*On the Doppler Effect*" - A.J.P., 40,1116 (1972).

[13] A. Einstein, *ibidem*, p. 155 – 158.

[14] Se consideriamo le trasformazioni di Lorentz una rotazione nello spazio quadridimensionale di Minkowski, la fase può essere vista come il prodotto scalare (invariante per rotazioni) di $(x, ict) \cdot (k, i\,\omega/c)$ e, quest'ultimo termine è la componente del quadrivettore di Lorentz (k, ict).

frequenza ν' *della luce percepita dall'osservatore, è data dall'equazione*: $\nu' = \nu \frac{1-\beta\cos\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}}$. *Questa è la formula dell'effetto Doppler per una velocità arbitraria*"[15].

Dunque, nella relatività ristretta per l'effetto Doppler, si ha: $\nu' = \nu \frac{(1\pm\beta\cos\varphi)}{\sqrt{1-\beta^2}}$ che, approssimando per $\beta \ll 1$ diventa $\nu' \cong \nu(1\pm\beta\cos\varphi)$, cioè quella data prima per la meccanica classica.

A rigore, in analogia a quanto affermato in precedenza con la meccanica classica, la formula trovata, come specifica Einstein stesso, dovrebbe valere nel caso dell'osservatore che si muove rispetto alla sorgente (ritenuta ferma rispetto al sistema in cui si misura le velocità dell'onda?).

La novità di questa formula, oltre a una correzione del secondo ordine in β, è che per $\varphi = \frac{\pi}{2}$ si ottiene il minimo della variazione di frequenza $(\delta\nu)_{tr} = (\nu' - \nu)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \nu\left[(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} - 1\right]$, cioè il cosiddetto effetto Doppler traversale, tipico, si dice, della relatività, perché, sostanzialmente, è la prevista dilatazione del tempo, marchio caratteristico della teoria di Einstein[16], la cui verifica puntuale (sic!), inizialmente con i famosi esperimenti di Ives e Stilwell (dei quali ci occuperemo dopo), ha contribuito a imporre la teoria della relatività come certa e inequivocabile!

Per $\varphi = 0$ oppure $\varphi = \pi$ si ha il cosiddetto effetto Doppler longitudinale, quello "classico", e l'equazione assume la forma $\nu' = \nu \frac{1\pm\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sqrt{\frac{(1\pm\beta)^2}{1-\beta^2}}$.

Di quest'ultima si dice che è simmetrica, a differenza di quella della meccanica classica, salvando, in questo modo, il principio di relatività galileiana, fondamento anche della relatività einsteiniana!

Dall'ultima formula, distinguendo i due casi (avvicinamento e allontanamento tra sorgente e osservatore) si ha $\nu' = \nu\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$ e $\nu' = \nu\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$ [17]. E dall'una si può effettivamente ottenere l'altra, ma dal caso dell'avvicinamento otteniamo quella dell'allontanamento (e viceversa)! Fisicamente restano due casi distinguibili perché si misurano frequenze diverse! La simmetria si ha solo formale nel senso che le due formule, a meno dei segni, matematicamente sono uguali. E' solo questa la simmetria ottenuta!

Ritorna, cioè, l'ipotesi di simmetria imposta da Einstein (che le trasformazioni siano un gruppo) senza la quale, con i soli due postulati fondamentali, è impossibile ottenere le trasformazioni di Lorentz[18]. L'ipotesi è che, essendo le trasformazioni trovate con i soli due postulati moltiplicate per una funzione qualunque della velocità $g(v)$ per ottenere le trasformazioni di Lorentz, è costretto, ricorrendo arbitrariamente, con argomenti fallaci, a dedurre da $g(v)\cdot g(-v) = 1$ che $g(v) = g(-v)$ supponendo in pratica che non ci sia nessuna differenza tra il caso di allontanamento e quello di avvicinamento di un osservatore verso un evento![19]

Nel caso in cui sia $\varphi \neq 0$ è possibile fare le stesse considerazioni di prima (oltre ai segni le due formule si potranno distinguere per un fattore che moltiplica β); qualcuno ha fatto notare, però, che se in generale ci sono sistemi in moto tra loro (sorgente luce – osservatore) e che l'angolo

---

[15] A. Einstein, *ibidem*, p. 156.
[16] Cfr., tra gli altri, R. H. Barron, P. Mazur, *Am. J. Phys.*, 44, 1200 (1976); B. L. Rawat, *Am. J. Phys*., 49, 1211 (1977).
[17] Nel suo famoso articolo del 1905, Einstein fa delle considerazioni errate su questa formula che correggerà in seguito, in una copia.
[18] A. Einstein, *ibidem*, pp. 145 – 146.
[19] Cfr. P. Di Mauro, S. Notarrigo, "*Sull'invarianza delle equazioni di Maxwell*", in Atti del XVI Congresso Nazionale di Storia della Fisica e dell'Astronomia, Como 1996 (a cura di P. Tucci), CNR, maggio 1997, p. 355; H. P. Robertson, *Rev.Mod. Phys.*,21,374 (1949).

tra le velocità in gioco sia diverso da zero, di questo bisogna tenerne conto nell'applicazione delle trasformazioni di Lorentz, in particolare nella legge di composizione delle velocità.[20]

In un lavoro, mio e di Notarrigo[21] del 1996, abbiamo dimostrato che le trasformazioni lineari più generali che soddisfano i due postulati della relatività e che rendono le equazioni di Maxwell invarianti si possono scrivere, in forma non vettoriale, in una sola dimensione, $\begin{cases} x = ax' \pm \sqrt{a^2-1}\cdot ct' \\ t = \pm\sqrt{a^2-1}\cdot\dfrac{x'}{c} + at' \end{cases}$, essendo a una qualunque funzione della velocità.

Sostituendo queste nella condizione che la fase dell'onda, scritta in una sola dimensione, resti invariata $kx - \omega t = k'x' - \omega' t'$ si ottiene, con la solita ipotesi che $\frac{\omega}{k} = \frac{\omega'}{k'} = c$: $\nu' = \nu\left(a \pm \sqrt{a^2-1}\right)$, che si riduce a quella ottenuta con le trasformazioni di Lorentz per $a = \gamma$ e $\frac{\sqrt{a^2-1}}{a} = \beta$. La formula trovata è possibile scriverla anche $\nu' = \frac{\nu}{a \mp \sqrt{a^2-1}}$.

Tali formule sono veramente simmetriche visto che il doppio segno non corrisponde a nessuna ipotesi fisica fatta, ma solo a una proprietà matematica delle trasformazioni!

Vediamo come è possibile trattare l'effetto Doppler parlando di particelle anziché di numero di onde.

Una sorgente *S* lancia N particelle al secondo, cioè con una frequenza propria data da $\nu = \frac{N}{t}$ (misurata in Herzt) verso un ricevitore (osservatore) *O*. Ciascuna particella ha velocità V e tra una particella e l'altra vi è la distanza λ. Se all'istante iniziale arriva la prima particella, la seconda arriverà dopo $\tau = \frac{\lambda}{V}$. Ma τ è dato da $\tau = \frac{t}{N} = \frac{1}{\nu}$ e dunque $\frac{1}{\nu} = \frac{\lambda}{V} \Rightarrow V = \lambda \cdot \nu$.

Vediamo come è possibile trattare l'effetto Doppler parlando di particelle anziché di numero di onde.

Una sorgente *S* lancia N particelle al secondo, cioè con una frequenza propria data da $\nu = \frac{N}{t}$ (misurata in Herzt) verso un ricevitore (osservatore) *O*. Ciascuna particella ha velocità V e tra una particella e l'altra vi è la distanza λ. Se all'istante iniziale arriva la prima particella, la seconda arriverà dopo $\tau = \frac{\lambda}{V}$. Ma τ è dato da $\tau = \frac{t}{N} = \frac{1}{\nu}$ e dunque $\frac{1}{\nu} = \frac{\lambda}{V} \Rightarrow V = \lambda \cdot \nu$.

Consideriamo prima il caso che *O* si muova (si allontani da *S* o si avvicini a *S*) con velocità *v*. Si avrà (per lo stesso ragionamento di prima) $\lambda' \cdot \nu' = V$. Vediamo com'è possibile trovare λ' e ν'. La particella arriverebbe a *O* dopo aver percorso λ se *O* fosse fermo, ma nello stesso tempo *O* si è mosso di un tratto ξ tale che: $\frac{\lambda \pm \xi}{V} = \frac{\xi}{v}$ da cui si ottiene $\xi = \frac{\lambda \cdot \frac{v}{V}}{1 \mp \frac{v}{V}}$. E quindi si ha:

---

[20] H. P. Robertson, *ibidem*, pp. 381 – 382.

[21] P. Di Mauro, S. Notarrigo, *ibidem*, p. 359.

$\lambda' = \lambda \pm \xi = \dfrac{\lambda}{1 \mp \dfrac{v}{V}}$. Sostituendo nella relazione per la velocità V si ottiene: $\dfrac{\lambda}{1 \mp \beta} \cdot \nu' = V$ (avendo posto $\beta = \dfrac{v}{V}$) da cui si ha: $\nu' = \nu(1 \mp \beta)$, cioè la usuale, classica equazione dell'effetto Doppler!

Lo stesso si ottiene anche solo con le definizioni di ν e ν'. Infatti, avendo sempre $\tau = \dfrac{t}{N} = \dfrac{1}{\nu}$, si ha $\tau' = \dfrac{t'}{N} = \dfrac{1}{\nu'} = \dfrac{\lambda + \xi}{V} = \dfrac{\lambda}{V\left(1 - \frac{v}{V}\right)}$ e quindi $\tau' = \dfrac{\tau}{1 - \frac{v}{V}} \rightarrow \dfrac{1}{\nu'} = \dfrac{1}{\nu\left(1 - \frac{v}{V}\right)} \rightarrow \nu' = \nu\left(1 - \dfrac{v}{V}\right)$ che è la formula classica usuale! E lo stesso si ottiene nel caso dell'avvicinamento.

Nel caso in cui sia S a muoversi ed O fermo ogni particella lanciata da S si muoverà con velocità $V \pm v$. La sorgente lancia sempre una particella ogni $\tau = \dfrac{1}{\nu}$ secondi. In questo tempo una particella percorre la distanza $\lambda' = (V \pm v) \cdot \tau = \dfrac{V \pm v}{\nu} = \lambda \cdot (1 \pm \beta)$. Ma nello stesso tempo S si è mossa di $\xi = v \cdot \tau$ e dunque si avrà $\lambda' = \lambda \cdot (1 \pm \beta) \mp v \cdot \tau = \lambda \cdot (1 \pm \beta) \mp \beta\lambda = \lambda$. Si ottiene $\lambda' \cdot \nu' = V \pm v \Rightarrow \lambda \cdot \nu' = V \pm v$, da cui $\nu' = \dfrac{V \pm v}{\lambda} = \nu \dfrac{V \pm v}{V} = \nu(1 \pm \beta)$, e cioè lo stesso dell'altro caso!

Nel paradigma delle particelle (e del vuoto) il principio di relatività ci assicura che ci deve essere una sola formula per i due casi (simmetria completa): questi, cioè, sono indistinguibile come deve essere per il principio di relatività!

Nella teoria usuale dell'effetto Doppler, cioè con le onde (dunque nel paradigma del campo), ci sono due formule (non simmetria) perché si considera che la sorgente, muovendosi, modifica solo la lunghezza dell'onda emessa, come se modificasse (deformasse) il mezzo in cui si sta propagando scordandosi, però, che, se c'è il mezzo, anche nel caso in cui è l'osservatore a muoversi in esso lo modifica interagendo con esso. Infatti, nel nostro modello, nel caso della sorgente in moto, se considerassimo per la nuova lunghezza d'onda solo $\lambda' = \lambda(1 \pm \beta)$ si otterrebbe $\nu' = \dfrac{\nu}{1 \mp \beta}$ cioè lo stesso che con le onde, la formula normalmente data!

Partendo dalle stesse considerazioni è possibile, anche con le particelle, trovare l'effetto Doppler trasversale. Si ha, infatti, come usato prima, $\dfrac{\nu'}{\nu} = \dfrac{c'}{c}$ e sostituendo $c' = \sqrt{c^2 + v^2}$, cioè la velocità della particella "vista" dall'osservatore in moto perpendicolarmente rispetto alla particella, o viceversa, si ottiene $\nu' = \nu\sqrt{1 + \beta^2} \approx 1 + \dfrac{1}{2}\beta^2$, cioè, con l'approssimazione, lo stesso risultato della relatività!

Con la teoria classica delle particelle, dunque, usando le trasformazioni di Galilei, i due casi (sorgente ferma e rivelatore in moto e viceversa) dell'effetto Doppler sono indistinguibili come preteso dal principio di relatività, non potendo, in questo modo, utilizzare tale effetto per considerazioni sul moto assoluto di un corpo! Chiaramente la velocità usata nel modello con le particelle, qui analizzato, è la velocità "relativa" della sorgente rispetto all'osservatore o viceversa, e per questo non è stata distinta l'una dall'altra.

E’ possibile ottenere l’effetto Doppler anche nel caso dell’urto tra corpi o tra particelle. In questo senso, per esempio, l’effetto Compton si può considerare un caso particolare dell’effetto Doppler.

Senza entrare in situazioni più generali si può considerare il caso semplice dell’urto tra fotoni e uno specchio in moto parallelamente a quello dei fotoni. Facendo l’ipotesi che quest’ultimi trasportano un’energia proporzionale alla frequenza posseduta, scritta, normalmente, introducendo la costante di Planck $E = h\nu$[22] e, anche dalla teoria classica dell’elettromagnetismo, una quantità di moto $p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}$, nel caso che la quantità di moto dei fotoni inverta il segno dopo l’urto, che la quantità di moto dello specchio dopo l’urto si mantenga approssimativamente uguale si ottiene la formula l’effetto Doppler.

Infatti utilizzando le equazioni della meccanica classica si ha:

$$\begin{cases} h\nu - Mvc = -h\nu' + Mv'c \\ h\nu + \frac{1}{2}Mv^2 = h\nu' + \frac{1}{2}Mv'^2 \end{cases}$$

da cui si ottiene: $2\nu = \frac{h}{2Mc^2}(\nu+\nu')^2 + (\nu+\nu')\left(1-\frac{v}{c}\right)$

Trascurando il primo termine dopo l’uguaglianza ($\approx 10^{-22}$ per il rosso e con la massa M dello specchio di qualche chilogrammo) si ottiene $\nu' = \nu\frac{1+\beta}{1-\beta}$, cioè la stessa formula dell’effetto Doppler classico, nel caso di un mutuo avvicinamento tra sorgente e osservatore! La stessa formula, senza nessun fattore relativistico, avremmo ottenuto se avessimo usato per l’energia cinetica e la quantità di moto dello specchio le relazioni date dalla relatività ristretta.

Si può considerare, con lo stesso modello, il caso dell’urto tra un fotone e uno specchio che si muovono perpendicolarmente l’uno all’altro.

In generale, con le formule della meccanica classica, si avrebbe:

$$\begin{cases} h\nu + \frac{1}{2}Mv^2 = h\nu' + \frac{1}{2}Mv'^2 \\ \frac{h\nu}{c} = Mv'\cos\vartheta + \frac{h\nu'}{c}\cos\varphi \\ Mv = Mv'\mathrm{sen}\vartheta + \frac{h\nu'}{c}\mathrm{sen}\varphi \end{cases}$$

essendo ϑ l’angolo formato dopo l’urto da M con l’asse x e φ l’angolo formato con l’asse delle x dal fotone dopo l’urto. Nel caso considerato di $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ anche dopo l’urto dalle formule di prima si ottiene:

---

[22] Nel suo famoso articolo del 1905 Einstein ricava, nell’ambito dell’effetto Doppler, che $\frac{E'}{E} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\left(=\frac{\nu'}{\nu}\right)$ senza concludere, come fa nel suo articolo sui quanti di luce, sempre del 1905, che l’energia trasportata da un’onda luminosa è proporzionale alla sua frequenza limitandosi ad affermare:”*E’ degno di nota che l’energia e la frequenza di un complesso luminoso* [cosa sarà mai un “complesso luminoso”?!] *varino in funzione dello stato di moto dell’osservatore secondo la stessa legge*”. (A. Einstein, *ibidem*, p.159).

$$\begin{cases} h\nu + \frac{1}{2}Mv^2 = h\nu' + \frac{1}{2}Mv'^2 \\ \frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c}\cos\varphi \\ Mv = Mv' + \frac{h\nu'}{c}sen\varphi \end{cases}$$

Ricavando ν' dalla seconda equazione e v' dalla terza, sostituendo nella prima e trascurando il termine $\frac{1}{2}\frac{h^2}{Mc^2}\nu^2 tg^2\varphi$ (per la luce visibile $\approx 10^{-53}\cdot tg^2\varphi$) facciamo l'approssimazione, si ottiene $\nu' = (1-\beta tg\varphi)$. Se facciamo l'approssimazione $tg\varphi \approx \varphi = \frac{v}{c}$ si ha $\nu' = \nu(1-\beta^2)$, da confrontarsi con quella, approssimata, data dalla relatività per l'effetto Doppler trasversale $\nu' = \nu\left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right)$

D'altra parte, dalla seconda equazione dell'ultimo sistema scritto si ha: $\nu' = \frac{\nu}{\cos\varphi}$. Se sostituiamo $\cos\varphi = \frac{c}{\sqrt{c^2+v^2}}$ si ottiene la stessa ottenuta prima, con le particelle, per il caso trasversale, $\nu' = \nu\sqrt{1+\beta^2}$.

Alcuni anni dopo la nascita della relatività ristretta di Einstein, alcuni fisici contestarono, tra l'altro, il secondo postulato della relatività, quello della costanza della velocità della luce nel vuoto affermando, invece, che la velocità della luce dipende dalla velocità sia della sorgente che dell'osservatore. Questo è il fondamento del teorema galileiano di addizione della velocità che forma la base delle teorie emissive, e segue naturalmente dal concetto di particella. Con il termine "teorie emissive" quasi sempre si intendono gli studi e le proposte di W. Ritz, Sir J.J.Thomson, O.M.Stewart, R.C. Tolman, R.A.Waldron, J.G. Fox e l'italiano Michele La Rosa.

Vengono considerate "teorie emissive" (teoria della sorgente d'origine, teoria balistica, teoria della nuova sorgente) quelle costruite su queste due assunzioni:

1) Il teorema galileiano delle velocità è applicabile alla radiazione elettromagnetica.
2) La radiazione elettromagnetica si propaga balisticamente.

Chiaramente nell'ambito delle teorie emissive anche le predizioni sull'effetto Doppler sono diverse da quelle della relatività e analoghe a quelle date prima per le particelle. Considerando sempre i due casi, si ha:

- Sorgente in moto con v_S: (Il moto della sorgente cambia la velocità e la frequenza della radiazione ma non la lunghezza d'onda.)

$$T' = \frac{T(c \pm v_S) \mp Tv_S}{c \pm v_S} = \frac{Tc}{c \pm v_S} \qquad \text{da cui} \qquad \nu' = T'^{-1} = \nu\left(1 \pm \frac{v_S}{c}\right).$$

- Osservatore in moto con v_O:

$$T' = \frac{Tc \mp T'v_O}{c} \Rightarrow T' = \frac{Tc}{c \pm v_O} \qquad \text{da cui:} \qquad \nu' = T'^{-1} = \nu\left(1 \pm \frac{v_o}{c}\right)$$

cioè si trova nei due casi la stessa formula, come trovato nel caso delle particelle.

In generale, secondo la legge di composizione della meccanica classica, la grandezza della velocità risultante c' è data da $c' = c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\varphi} \pm v\cos\varphi$ (il segno più per l'avvicinamento e quello meno per l'allontanamento), essendo φ l'angolo tra la linea del segnale e il vettore velocità della sorgente (la linea del segnale geometricamente è la linea più corta che unisce osservatore e sorgente, ed è la direzione della velocità risultante della luce che arriva all'osservatore dalla sorgente in moto). Allora, con questa nuova velocità della luce, si ottiene il seguente nuovo periodo: $T' = \frac{Tc' \mp Tv\cos\varphi}{c'}$, da cui si ha $T' = T\frac{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\varphi}}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\varphi} \pm v\cos\varphi}$, cioè, in termini di frequenza $\nu' = \nu\frac{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\varphi} \pm v\cos\varphi}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\varphi}}$, e lo stesso del periodo in termini di lunghezza d'onda.

Tra gli esperimenti storici ritenuti fondamentali per la verifica dell'effetto Doppler, in particolare quello trasversale, vi sono quelli di Ives e Stilwell del 1938 e del 1941[23] considerati come quelli di Michelson e Morley cruciali per la verifica (o il fondamento?!) della teoria della relatività ristretta dato che lo spostamento Doppler è assimilato alla dilatazione del tempo, come si suole dire, caratteristica della relatività einsteiniana,.

L'esperimento di Ives e Stilwell è stato originariamente designato per ricercare l'effetto Doppler trasversale come predetto dalla teoria di Larmor – Lorentz. Questa teoria assumeva l'esistenza dell'etere e rigettava il postulato einsteiniano della costanza della velocità della luce. Tuttavia la sua struttura matematica è esattamente la stessa della teoria speciale di Einstein. Ives ha investito un po' di tempo e di sforzo nella promozione della sua teoria di Larmor – Lorentz. Egli anche ha chiamato il suo effetto Doppler trasversale la "rate of a Moving Atomic Clock", nel tentativo di attrarre alcuni super entusiasti relativisti dalla sua parte!

Il principio di questi esperimenti è di misurare il valore medio dello spostamento Doppler longitudinale delle linee spettrali in direzione di emissione avanti e indietro rispetto alla velocità della sorgente. In questa media viene cancellato lo spostamento di primo ordine longitudinale lasciando solo un effetto del secondo ordine, tipico della relatività.

Senza entrare nei dettagli dell'apparato sperimentale usato, l'effetto Doppler trasversale, del secondo ordine in β, è stato osservato usando raggi canali di velocità e direzione definita. La difficoltà di queste misure è legata al sovrapporsi di un contributo dovuto all'effetto Doppler longitudinale non appena la direzione di osservazione si sposta, anche di poco, rispetto alla perpendicolare. Tale difficoltà si considera superata notando che nel caso di due raggi luminosi emessi in direzione opposte da un raggio canale, lo spostamento Doppler longitudinale subito è uguale e contrario; basta quindi osservare simultaneamente entrambi i raggi luminosi e prendere la media dei risultati, per eliminare completamente ogni effetto longitudinale.

[23]H.Ives, et al., *J. Opt. Soc. Am.*, 28, 215-226 (1938). H.Ives, et al., *J. Opt. Soc. Am.*, 31, 369-374 (1941).

L'idea di usare raggi canale per ricercare l'effetto Doppler trasversale fu prima suggerito da Einstein e Ritz. Tuttavia, il loro esperimento immaginario non era fattibile. Ciò perché non si può essere sicuri di osservare raggi canale ad angolo retto rispetto alla direzione del moto. Inoltre, lo spostamento Doppler è molto minuscolo e le piccole deviazioni, dall'angolo di 90° , introducono uno spostamento Doppler convenzionale di grandezza simile a quella predetta dalla teoria. Per queste ragioni Ives e Stilwell hanno deciso di osservare nella direzione del massimo spostamento Doppler del blu e la direzione del massimo spostamento Doppler del rosso attorno all'angolo di 0° e di 180°.

L'effetto Doppler trasversale, del secondo ordine in β, è stato osservato in laboratorio usando raggi canali di velocità e direzione definita. La difficoltà di queste misure è legata al sovrapporsi di un contributo dovuto all'effetto Doppler longitudinale non appena la direzione di osservazione si sposta, anche di poco, rispetto alla perpendicolare. Tale difficoltà si supera [?!] però notando che nel caso di due raggi luminosi emessi in direzione opposte da un raggio canale, lo spostamento Doppler longitudinale subito è uguale e contrario; basta quindi osservare simultaneamente entrambi i raggi luminosi e prendere la media dei risultati, per eliminare completamente ogni effetto longitudinale.

Le stesse formule della relatività, scritte per la lunghezza d'onda anziché per la frequenza con la lunghezza d'onda, mettendo a posto i segni per l'avvicinamento (indicato con *a*) e l'allontanamento (indicato con *r*), sono: $\lambda_a = \lambda \frac{1-\beta\cos\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}}$ e $\lambda_r = \lambda \frac{1+\beta\cos\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}}$, da cui $\Lambda = \frac{\lambda_a + \lambda_r}{2} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\beta^2}}$. La posizione media delle linee è, dunque, spostata verso il rosso di: $\Delta_2\lambda = \Lambda - \lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\beta^2}} - \lambda \cong \frac{\lambda\beta^2}{2}$, sviluppando in serie il denominatore e arrestandoci ai termini di secondo grado in β, essendo λ = lunghezza d'onda della sorgente ferma.

Si otterrebbe lo stesso se considerassimo lo spostamento prima tra 0° e 90° e poi tra 90° e 180°.

Nell'esperimento $\beta \approx 0,0072$ per ioni H_2^+ in un tubo di raggi canale. Per evitare di usare le misure del potenziale del tubo, che erano spesso non accurate, è stata usata la grandezza dello spostamento di primo ordine dell'effetto Doppler longitudinale come misura della velocità degli ioni $\Delta_1\lambda \cong \lambda\beta\left(1+\frac{\beta}{2}\right)$.

Se si trascura in $\Delta_1\lambda$ il termine di secondo grado in β si ha la parabola riportata in molti manuali $\Delta_2\lambda = \frac{|\Delta_1\lambda|^2}{2\lambda_0}$ e sembrerebbe verificata dai risultati sperimentali trovati (in un grafico i punti si dispongono "attorno" alla parabola desiderata!)

Facciamo gli stessi passaggi con i nostri simboli. Per la relatività si ha:

$$\nu' = \nu \frac{1-\beta\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

1. $\theta = 0$ (effetto Doppler longitudinale) $\nu_l' = \nu \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \lambda_l' = \lambda \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta} = \lambda\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$

da cui, come fanno Ives e Stilwell, <u>ma senza trascurare i termini di secondo grado</u> si ottiene:

$$\Delta\lambda_1 = \lambda_l' - \lambda = \lambda\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - \lambda \approx \lambda\left[1 + \frac{\beta}{1-\beta} - \frac{\beta^2}{2}(1+\beta) - 1\right] \approx \lambda\left(\beta + \frac{\beta^2}{2}\right);$$

2. $\theta = 90^0$ (effetto Doppler trasversale) $\nu_t' = \frac{\nu}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \lambda' = \lambda\sqrt{1-\beta^2}$

da cui si ottiene:

$$\Delta\lambda_2 = \lambda\sqrt{1-\beta^2} - \lambda \approx \lambda\left(1 - \frac{1}{2}\beta^2\right) - \lambda \approx -\frac{\lambda\beta^2}{2} \Rightarrow |\Delta\lambda_2| = \frac{\lambda\beta^2}{2}$$

Mettendo assieme i risultati ottenuti si ha: $|\Delta\lambda_2| = \Delta\lambda_1 - \lambda\beta$ o, che è lo stesso $\Delta\lambda_1 - \Delta\lambda_2 = \lambda\beta$, che è, in un sistema di assi cartesiani, una retta!

Dunque, se si trascura in $\Delta\lambda_1$ il termine di secondo grado in β si ha la parabola riportata prima $|\Delta\lambda_2| = \frac{(\Delta\lambda_1)}{2\lambda}$ e la cosa, dal punto di vista sperimentale, dovrebbe funzionare, se no i risultati sono contro la relatività, perché bisogna confrontarli con la relazione (una retta) $|\Delta\lambda_2| = \Delta\lambda_1 - \lambda\beta$! <u>Cioè i risultati sono in accordo con la relatività solo se noi decidiamo di trascurare nella nostra teoria il termine</u> $\frac{\beta^2}{2}$! (Ma è proprio sui termini di secondo grado che la relatività si distacca dalla meccanica classica! E' lo stesso della teoria di Michelson e Morley usata per interpretare i loro risultati!).

Si è detto che gli stessi risultati teorici trovati con le particelle, compreso l'effetto Doppler trasversale, vengono ritrovati nelle teorie emissive. Vediamo, allora, cosa ci si può aspettare per gli esperimenti di Ives e Stilwell con queste teorie.

Seguendo lo stesso ragionamento e la stessa simbologia di prima la teoria emissiva ci fornisce: $\lambda_a = \lambda\frac{\sqrt{1-\beta^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{1-\beta^2\sin^2\varphi}+\beta\cos\varphi}$ e $\lambda_r = \lambda\frac{\sqrt{1-\beta^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{1-\beta^2\sin^2\varphi}-\beta\cos\varphi}$. La lunghezza d'onda varia con $0 \le \varphi \le 90°$. Si ottiene:

$\Lambda_a = \frac{\lambda_a(0°)+\lambda_a(90°)}{2} = \lambda\frac{1+\beta/2}{1+\beta}$ e $\Lambda_r = \frac{\lambda_r(0°)+\lambda_r(90°)}{2} = \lambda\frac{1-\beta/2}{1-\beta}$ da cui $\Lambda = \frac{\Lambda_a+\Lambda_r}{2} = \lambda\frac{1-\frac{\beta^2}{2}}{1-\beta^2}$ da cui si ottiene il valore dello spostamento Doppler previsto con questa teoria per l'esperimento di Ives e Stilwell: $\Lambda_2\lambda = \Lambda - \lambda = \frac{\lambda\beta^2}{2}\frac{1}{1-\beta^2}$, da confrontarsi con quello dato dalla relatività $\Delta_2\lambda \cong \frac{\lambda\beta^2}{2}$. La discrepanza è sul quarto ordine di β, cioè lo stesso risultato teorico!

Ives e Stilwell non cercavano una conferma per la relatività né furono difensori della stessa (nonostante il titolo del loro lavoro!) e infatti diedero un modello teorico completamente differente per rendere conto dei loro risultati sperimentali e la deviazione dalla predizione classica.

Questo ribadisce il fatto, da noi sottolineato in questi anni diverse volte, che i risultati di un esperimento non possono mai univocamente determinare *la* teoria di un fenomeno. Essi possono solo distinguere i modelli, il campo dei modelli considerati (a disposizione), e la loro eventuale consistenza con i risultati sperimentali ottenuti.