Velocità e trasformazioni*

Pietro Di Mauro
(INFN, Sezione di Catania – Gruppo di lavoro Mondotre – La Scuola Italica,
Associazione Culturale " Salvatore Notarrigo")

* *Comunicazione al XCIII CONGRESSO NAZIONALE S.I.F. – PISA 2007*

Abstract: In special relativity two reference frames that move with uniform velocity relative *v* known are considered. How can we define and measure it since the measure of the space and time are dependent on it? The "classic" definition of velocity is the so-called Galilean transformation. By utilizing a signal of light an observer can find the velocity of a body compared to him. This way it is possible to obtain a formula that let us find the velocity, that result always minor *c*. It's possible also to measure (indirect way) the basic quantities and to compare them with relativistic expectations.

In tutti i discorsi che si fanno sulla relatività ristretta si suppone sempre che ci siano due sistemi di riferimento (due osservatori) in moto relativo traslatorio uniforme tra loro con velocità *v,* e questa si suppone nota.

Già Einstein nel suo lavoro del 1905 scrive[1]: *"… Imprimiamo ora all'origine di uno dei due sistemi, che chiameremo k, un moto con velocità (costante) v nella direzione delle x crescenti dell'altro sistema (K), che rimane a riposo, e supponiamo che tale velocità sia comunicata agli assi coordinati del sistema k, al relativo regolo e agli orologi".*

Com'è possibile conoscere la velocità *v* relativa di un osservatore rispetto all'altro? Com'è possibile definirla?

In relatività sembrerebbe che la velocità sia definita nel modo usuale, come nella meccanica di Galilei e Newton. Si esprime molto bene il Bridgman[2]: *"Il concetto di velocità, come definito di solito, implica i due concetti di spazio e tempo. Le operazioni con cui noi misuriamo la velocità di un oggetto sono queste: dapprima osserviamo l'istante in cui l'oggetto è in una posizione, poi osserviamo l'istante in cui esso si trova in un'altra posizione, dividiamo la distanza fra le due posizioni per l'intervallo di tempo e se necessario, quando la velocità è variabile, passiamo al limite".*

La definizione di velocità media di un corpo, rispetto ad un osservatore, data prima, si può scrivere:

$$1) \qquad v = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

essendo $x(t_1)$ la posizione del corpo all'istante t_1 e $x(t_2)$ la posizione del corpo all'istante t_2 rispetto all'osservatore, e i tempi misurati con un orologio dell'osservatore (trattando velocità costanti nel tempo, possiamo sempre utilizzare la 1), senza passare al limite).

La 1) è possibile scriverla nella forma:

$$2) \qquad x(t_2) = x(t_1) + v(t_2 - t_1)$$

In quest'ultima equazione è possibile sostituire $x'(t_1)$ al posto di $x(t_1)$, cioè la posizione iniziale considerata in un altro sistema di riferimento in moto (con velocità v) rispetto al sistema dell'osservatore. In generale dovrebbe essere $x(t_1) = a + x'(t_1)$, essendo $a = OO'$ = distanza tra le due origini dei sistemi di riferimento. Ma a partire da Einstein si fa la convenzione che nell'istante iniziale delle osservazioni (t_1 nel nostro caso) le due origini coincidano, cioè $a = 0$.

[1] A. Einstein. "*Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento*" in "L'anno memorabile di Einstein", a cura di J. Stachel, Edizioni Dedalo, 2001, pag. 140.

[2] P. W. Bridgman, "*La logica della fisica moderna*", Boringhieri, 1965, pag.110.

E d'altra parte è sempre possibile considerare la posizione iniziale del corpo, nel punto 1, all'istante iniziale, come l'origine di un altro sistema di riferimento (e di un possibile altro osservatore) dotato anch'esso di orologio che segna lo stesso tempo dell'altro.

Con la sostituzione operata si ottengono:

$$3) \qquad \begin{cases} x(t_2) = x'(t_1) + v(t_2 - t_1) \\ t = t' \end{cases}$$

che, a partire da P. Franck (1909), viene chiamata trasformazione di Galilei.

Dunque, la cosiddetta trasformazione di Galilei (chiaramente non si trova negli scritti di Galilei!) è tautologicamente equivalente alla definizione data di velocità: <u>la trasformazione di Galilei è la definizione classica di velocità!</u>

Ma la trasformazione di Galilei è stata sostituita dalle trasformazioni di Lorentz. E, come si dice in relatività, spazio e tempo sono "relativi", dipendono dalla velocità, sono funzioni di questa. Ci troviamo in un circolo vizioso!

E la definizione di velocità? Usualmente in tutte le derivazioni delle trasformazioni di Lorentz si considera v nota e definita classicamente $(v = x/t)$, come si diceva all'inizio. Anche nella derivazione di altre trasformazioni più generali o diverse da quelle di Lorentz, la velocità si dà sempre nota, anche se la sua definizione alla fine si può discostare da quella usuale, pur restando una funzione dello spazio e del tempo. D'altra parte quando in una qualunque trasformazione che riguarda, per esempio lo spazio (in funzione del tempo e della velocità), si richiede l'omogeneità, con le convenzioni date, può essere presente un termine che sia prodotto di funzioni solo del tempo e della velocità, che abbiano le dimensioni di t e v, ma non è detto che debba essere il più semplice vt! In generale si potrebbe porre $x/t = \varphi(v)$! <u>Proprio la definizione di velocità si potrebbe considerare come possibile discriminante tra le varie trasformazioni trovate</u>, anche se sempre più spesso, nei lavori recenti su questi argomenti, la velocità v viene considerata un semplice parametro matematico privo di ogni significato fisico!

Dalle trasformazioni di Lorentz, per esempio, a differenza di quelle di Galilei, la velocità definita solitamente si ricava solo ponendo $x(t_1) = x'(t_1) = 0$. Senza questa posizione si ha, in generale, avendo indicato $x = x(t_2)$, $x_0 = x(t_1)$, $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$4) \qquad v = \frac{x\Delta t \pm \frac{x_0}{c}\sqrt{x_0^2 - x^2 + c^2\Delta t^2}}{\frac{x_0^2}{c^2} + \Delta t^2}$$

dalla quale si ricava $v = \dfrac{x - x_0}{\Delta t}$ (eliminando la radice con il segno positivo) solo per $c^2 t^2 >> x^2 - x_0^2$.

Com'è possibile definire e misurare la velocità di un corpo (o di un sistema) rispetto ad un osservatore O, in modo indiretto, utilizzando i segnali luminosi per conoscere la posizione di un corpo nel tempo (supponendo la coincidenza tra spazio ottico e tattile evidenziata da Bridgman), mantenendo la definizione usuale di velocità (spazio percorso/tempo impiegato a percorrerlo)?

In modo più semplice, ma senza perdere di generalità, è possibile trattare la questione in una sola dimensione, x.

La posizione di un corpo, al tempo t, rispetto all'osservatore O dotato di orologio, può essere trovata in questo modo.

Al tempo τ_1 lancia un raggio di luce verso il corpo. Viene riflesso dal corpo e ritorna all'istante t_1. Il corpo all'istante t_1 si trova nella posizione:

$$5)\qquad x(t_1)=\frac{c(t_1-\tau_1)}{2}\pm\varepsilon_1$$

essendo $\pm\,\varepsilon_1$ lo spazio percorso dal corpo nel tempo che impiega la luce per tornare dopo la riflessione sul corpo che si allontana o che sì avvicina all'osservatore, avendo tenuto conto che il tempo t, istante in cui il raggio raggiunge il corpo, è dato da $t=(t_1+\tau_1)/2$ e, quindi, che la luce impieghi lo stesso tempo nell'andata e nel ritorno (quest'ultima viene da alcuni chiamata "tesi di convenzionalità").

Analogamente scegliendo arbitrariamente un altro istante τ_2 si ha:

$$6)\qquad x(t_2)=\frac{c(t_2-\tau_2)}{2}\pm\varepsilon_2$$

La velocità media che l'osservatore assegnerà al corpo sarà data dalla 3) sostituendo la 1) e la 2). Si ottiene:

$$7)\qquad v=\frac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{c}{2}\left(1-\frac{\tau_2-\tau_1}{t_2-t_1}\right)\pm\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{t_2-t_1}$$

Ma si avranno anche:

$$8)\qquad \varepsilon_1=\frac{v(t_1-\tau_1)}{2}\quad,\quad \varepsilon_2=\frac{v(t_2-\tau_2)}{2}$$

e sostituendo si ottiene la formula cercata:

$$9)\qquad v=c\frac{1-\dfrac{\tau_2-\tau_1}{t_2-t_1}}{1+\dfrac{\tau_2-\tau_1}{t_2-t_1}}=c\frac{\Delta t-\Delta\tau}{\Delta t+\Delta\tau}$$

avendo posto $\Delta t=t_2-t_1$ e $\Delta\tau=\tau_2-\tau_1$.

Data l'arbitrarietà degli istanti iniziali, sarà possibile scegliere, $\tau_1=0$, $\tau_2=t_1=t_0$ e quindi $\tau_2-\tau_1=\Delta t_0$, analogamente a $t_2=t$ e quindi $t-t_0=\Delta t$ (cioè nell'istante in cui si riceve il ritorno del primo segnale parte il secondo) e la 9) diventa la più semplice:

$$10)\qquad v=c\left(\frac{\Delta t-\Delta t_0}{\Delta t+\Delta t_0}\right)=c\left(\frac{\tau-1}{\tau+1}\right)=c\alpha\qquad\text{con}\qquad \tau=\frac{\Delta t}{\Delta t_0}\quad\text{e}\quad \alpha=\frac{\tau-1}{\tau+1}$$

La 10), dunque, ci permette di calcolare le velocità di un corpo (o di un sistema) rispetto ad un osservatore in modo indiretto, dalla sola misura di tempi sull'orologio dell'osservatore. (Δt_0 in una osservazione, o in un set di misure, si può considerare il tempo campione rispetto al quale misurare tutti gli altri tempi).

La velocità trovata sarà sempre minore di *c,* dato che, per come si è definita, si avrà sempre $-1<\alpha<1$. Inoltre si troverà $v>0$, cioè il corpo si allontanerà dall'osservatore se $\Delta t>\Delta t_0$, mentre si troverà $v<0$, corpo in avvicinamento, nel caso contrario. Per $\Delta t\approx\Delta t_0$, $v\to 0$ e per $\Delta t>>\Delta t_0$, $v\to c$.

Dunque, è possibile in modo indiretto, utilizzando un segnale luminoso, conoscere la velocità di un corpo e la sua posizione istante per istante rispetto a un osservatore mantenendo la definizione usuale di velocità e trovando che questa deve essere sempre minore della velocità della luce (come in relatività!). Questo è ciò che un osservatore può dire del corpo dal punto di vista cinematico. La definizione della grandezza velocità è rimasta invariata, ma è cambiato il metodo per misurarla, utilizzando la luce.

Con lo stesso metodo usato per definire la velocità, con raggi di luce, se un osservatore vuole conoscere qual è il tempo segnato da un orologio in moto precedentemente sincronizzato (quando passano uno accanto all'altro, nell'istante t_0) troverà:

$$11) \qquad t = t_0 + \frac{x(t)}{c \pm v}$$

cioè il tempo segnato dall'orologio di in moto è lo stesso di quello segnato dall'orologio di *O,* essendo il secondo termine della 11) il tempo misurato dall' osservatore perché il raggio di luce raggiunga l'orologio in moto. Cioè, se i due orologi, in un certo istante hanno segnato lo stesso tempo (quando sono passati uno accanto all'altro) continueranno a segnare lo stesso tempo, anche se sono separati da una distanza x.

Lo stesso si può dire per la lunghezza di un regolo.

Supponendo di conoscere la lunghezza a riposo di un'asta, con metodo diretto (l_0 per confronto con l'unità di misura), se si vuole determinare la lunghezza dell'asta quando essa è in moto con velocità *v* con metodo indiretto, mediante segnali luminosi come si è fatto finora, si troverà:

$$12) \qquad \begin{cases} x_A = \frac{1}{2}(c+v)\left(t_A - t_0 - \frac{l_0}{c}\right) \\ x_B = \frac{1}{2}(c+v)(t_B - t_0) \end{cases}$$

La lunghezza misurata *l* sarà data da:

$$13) \qquad l = x_B - x_A - v(t_B - t_A) = x_B - x_A - \frac{v}{c} l_0 = l_0$$

Dunque un solo osservatore misurerà la stessa lunghezza per l'asta sia con metodo diretto che con metodo indiretto, utilizzando i segnali luminosi.

In relatività però si considerano sempre due osservatori che descrivono lo stesso evento e che dovrebbero scambiarsi le conoscenze delle grandezze misurate da ciascuno. Questo è richiesto: l'impossibile confronto tra osservazioni fatte di un evento (di un corpo, di un sistema) da due osservatori in moto tra loro. E questi per accordarsi sui segnali da lanciare (simultaneità), per confrontare le loro misure, otterranno misure "relative", "apparenti" (contrazione, dilatazione, etc... e i loro paradossi) dipendenti dalle convenzioni adottate.

Il discorso sulle possibili trasformazioni da usare per passare da un sistema (osservatore) ad un altro nasce proprio dalla pretesa di dover confrontare le misure fatte da un osservatore *O* di un evento *E* e quelle fatte sullo stesso evento da un altro osservatore *O'* (supposto in moto relativo uniforme rispetto ad *0*) e quindi conoscere grandezze di *E* rispetto a *O'* come "vista" da *O* (o viceversa). Senza la pretesa di tale impossibile confronto ciascun osservatore potrà fare le sue misure senza dover invocare nessuna trasformazione!

Ma, <u>in tutti gli esperimenti che vengono portati a supporto della teoria non ci sono mai due osservatori, due rivelatori</u>! L'osservatore raccoglie le misure, rispetto a quelle che un ipotetico osservatore solidale con l'evento (a riposo rispetto a questo) gli assegnerà. In pratica si ha sempre la necessità di conoscere le misure delle grandezze in gioco a riposo, per confronto diretto, per altre vie… [!?] e poi misurare le eventuali differenze quando queste vengono considerate in moto! Questo è il ruolo assegnato alle trasformazioni per passare da un sistema ad un altro!

Nelle trasformazioni lineari più generali possibili che lasciano invariate in forma le equazioni di Maxwell e soddisfano i postulati della relatività ristretta di Einstein, da noi trovate nel 1996[3], la 14),

$$14)\qquad \begin{cases} x = ax' \pm \sqrt{a^2 - 1}\cdot t'c \\ t = \pm\sqrt{a^2 - 1}\cdot \dfrac{x'}{c} + at' \end{cases} \quad \text{(con } a \text{ una qualunque funzione).}$$

intanto è proprio la definizione di velocità ad operare la possibile distinzione tra le infinite trasformazioni.

Allora se si vuole imporre l'invarianza dell'equazione dell'onda per due sistemi di riferimento in moto relativo tra loro usando la trasformazione generale e con la definizione di velocità solita (ponendo sempre $x' = 0$) si ha:

$$15)\qquad v = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a} c$$

e, confrontando con la formula della velocità trovata data dalla 10), si ha:

$$16)\qquad a = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\tau-1}{\tau+1}\right)^2}} = \pm\frac{\tau+1}{2\sqrt{\tau}}$$

La trasformazione 12) diventa:

$$17)\qquad \begin{cases} x = a\left(x' \pm vt'\right) = \dfrac{\tau+1}{2\sqrt{\tau}}\left[x' \pm \left(\dfrac{\tau-1}{\tau+1}\right)ct'\right] \\ t = a\left(t' \pm \dfrac{vx'}{c^2}\right) = \dfrac{\tau+1}{2\sqrt{\tau}}\left[t' \pm \left(\dfrac{\tau-1}{\tau+1}\right)\dfrac{x'}{c}\right] \end{cases}$$

e la sua inversa:

$$\begin{cases} x' = a\left(x \mp vt\right) = \dfrac{\tau+1}{2\sqrt{\tau}}\left[x \mp \left(\dfrac{\tau-1}{\tau+1}\right)ct\right] \\ t' = a\left(t \mp \dfrac{vx}{c^2}\right) = \dfrac{\tau+1}{2\sqrt{\tau}}\left[t \mp \left(\dfrac{\tau-1}{\tau+1}\right)\dfrac{x}{c}\right] \end{cases}$$

Con la stessa tecnica utilizzata nella relatività del confronto tra grandezze prima descritta, è possibile scrivere $l = \dfrac{l_0}{a} = \dfrac{2\sqrt{\tau}}{\tau+1} l_0$, essendo l_0 la "*lunghezza propria*" di un'asta a riposo nel

[3] P. Di Mauro, S. Notarrigo, "*Sull'invarianza delle equazioni di Maxwell*", in www.lascuolaitalica.it/pubbl5.htm

sistema che si muove con velocità v rispetto all'osservatore e l'analoga per il tempo $t = at_0 = \dfrac{\tau + 1}{2\sqrt{\tau}} t_0$.

Lo stesso è possibile fare, per esempio, tra l'altro, con la quantità di moto e l'energia cinetica: $p = am_0 v = m_0 c \dfrac{\tau - 1}{2\sqrt{\tau}}$, $E = m_0 c^2 \left(\dfrac{\tau + 1}{2\sqrt{\tau}} - 1 \right)$.

Si tratterebbe allora di confrontare queste equazioni con quelle fornite dalla relatività.

Come abbiamo riferito in altri lavori i risultati sperimentali accettati non riescono a discriminare tra le equazioni proposte!

Dunque, per concludere, eventualmente il fatto nuovo che bisogna aggiungere alla meccanica di Galilei e Newton è che anche le grandezze fondamentali, quali la velocità, possono e devono essere misurate non solo per confronto diretto con l'unità di misura, ma anche utilizzando come segnale d'informazione la luce, che qui si suppone avente velocità costante.