Sulla relazione di de Broglie*

Pietro Di Mauro
(INFN - Sezione di Catania, Liceo Scientifico "E. Fermi" – Paternò (CT)
Gruppo di lavoro Mondotre – La Scuola Italica,
Associazione Culturale " Salvatore Notarrigo")

* in *Atti del XLVII Congresso Nazionale AIF, Roma 2008 - La Fisica nella Scuola, Bollettino trimestrale dell'AIF, Anno XLII – Supplemento al n. 3 luglio – settembre 2009, pp. 68 – 73, Monotipia Cremonese (CR).*

Abstract: Seguendo i primi lavori di L. de Broglie (1923 – 1925) sulla nascente teoria dei quanti, vengono analizzate le idee che portarono ad ipotizzare il dualismo onda – corpuscolo anche per le particelle. Vengono esaminati, in particolare, i concetti relativistici che sono entrati in tale elaborazione e le difficoltà connesse. Vengono elaborate alcune nostre considerazioni, compreso il risultato da noi trovato: anche in meccanica classica è possibile ricavare una relazione di de Broglie! Infine vengono valutati gli esperimenti più significativi (a partire da quello di Davisson e Germer) facendo notare come nella maggior parte di essi l'elaborazione dei dati viene fatta usando l'espressione classica dell'energia cinetica.

Nella sua tesi di laurea del 1924 ("Recherches sur la Theorie des Quanta"[1]) de Broglie raccoglie le idee e i risultati che aveva, in parte, anticipato in alcuni lavori precedenti. In tale tesi egli scrive, tra l'altro, la relazione che porta il suo nome.

In questo nostro scritto vogliamo analizzare i concetti che stanno alla base di tale relazione, così come de Broglie in questi primi lavori li elabora. Vogliamo esaminare, in particolare, quelli cosiddetti "relativistici" che sono entrati in tale elaborazione perché, quasi sempre, si ritiene che la relazione che porta il suo nome sia un corollario della teoria della relatività ristretta, come afferma lo stesso de Broglie: "*In this work we shall simply take these results as given and known and use them, especially from Special Relativity, as needed*"[2].

Tale relazioni viene da tutti considerata fondamentale perché con essa si ritiene di aver esteso il cosiddetto dualismo onda – corpuscolo anche alla materia, completando quel dualismo che per la luce ormai cominciava ad essere accettato dopo i lavori di Planck del 1900 e di Einstein del 1905. Così si esprime a riguardo de Broglie nella sua Nobel Lecture: "*I thus arrived at the following overall concept which guided my studies: for both matter and radiations, light in particular, it is necessary to introduce the corpuscle concept and the wave concept at the same time. In other words the existence of corpuscles accompanied by waves has to be assumed in all cases. However, since corpuscles and waves cannot be independent because, according to Bohr's expression, they constitute two complementary forces of reality, it must be possible to establish a certain parallelism between the motion of corpuscle and the propagation of the associated wave*"[3].

In effetti il punto di partenza di de Broglie, $h\nu_0 = m_0 c^2$, è una sintesi delle due grandi teorie che si sono affacciate nella scienza all'inizio del secolo scorso.

A partire da tale uguaglianza si crede di derivare, usando le trasformazioni di Lorentz, l'espressione di un'onda, che ha una velocità di fase maggiore della velocità della luce, che "segue" la particella, la cui velocità di gruppo coincide con quella della particella e con una lunghezza d'onda data proprio dalla relazione di de Broglie.

Nel primo capitolo della sua tesi, de Broglie afferma che la più importante eredità consegnataci dalla teoria della relatività ristretta può essere espresse da $E = m_0 c^2$ (m_0 = massa a riposo, c = velocità limite dell'energia, e quindi E rappresenta l'energia di un corpo fermo) e così la

[1]L. de Broglie, "*On the theory of quanta*" (a translation of the thesis of de Broglie, "Recherches sur la théorie des quanta", trans. by A.F. Kracklauer), *Ann. de Phys.*, 10^e serie, **t. III**, (1925).
[2] L. de Broglie, op. cit., pag. 3.
[3] L de Broglie, "*The wave nature of the electron*" Nobel Lecture, December 12, 1929, pag. 247.

commenta: "*Beginning from atomic theory, electronic theory leads us to consider matter as being essentially discontinuous, and this in turn, contrary to traditional ideas regarding light, leads us to consider admitting that energy is entirely concentrated in small regions of space, if not even condensed at singularities*"[4]. Inoltre l'energia cinetica diventa $E_{cin} = m_0 c^2 \left[\left(1-\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right]$ che per $\beta \to 0$ si può ridurre a $E_{cin} = \frac{1}{2} m_0 v^2$.

Dall'altra parte la teoria dei quanti ci consegna l'idea che: $E = h$ x frequenza.

In questo contesto bisogna precisare che l'energia definita da $E = h\nu_0$ è l'energia cinetica media (che può essere anche $E = \frac{1}{2} m v^2$) di oscillatori armonici (come si ha nella teoria cinetica dei gas) ai quali è possibile applicare il principio di equipartizione della stessa. Ma nel suo lavoro de Broglie considera E o l'energia totale posseduta da un corpo $E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ o quella associata a un corpo fermo, riprendendo appunto due concetti tipicamente relativistici.

In qualunque caso $h\nu_0 = m_0 c^2$ (ν_0 nel sistema di m_0, a riposo) è il punto di partenza della sua ipotesi (o tesi?!).

E iniziare ponendo l'energia di una particella uguale a $h\nu_0$, che è considerato l'aspetto corpuscolare della luce (come, si dice, insegna Einstein!), per ricavare l'aspetto ondulatorio della materia è quantomeno singolare!

In realtà la relazione scritta prima, quando applicata a un corpo in moto uniforme, porta a due formule diverse, come ha trovato lo stesso de Broglie. Infatti, rispetto a un osservatore fisso, se m_0 si muove, dalle trasformazioni di Lorentz per il tempo (la cosiddetta dilatazione del tempo), si ha:

$$\nu_1 = \nu_0 \sqrt{1-\beta^2} = \frac{m_0 c^2}{h} \sqrt{1-\beta^2} \, .$$

Ma d'altra parte, sempre per l'osservatore fisso, l'energia totale di m_0 in moto è $\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ e la corrispondente frequenza: $\nu = \frac{m_0 c^2}{h} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

E così: $\nu_1 \neq \nu$! (data dal fattore $\sqrt{1-\beta^2}$ che compare una volta a moltiplicare e una volta a dividere. Si ha: $\nu_1 = \nu\left(1-\beta^2\right)$). "*This is a difficulty that has intrigued me for a long time*"[5]. Anche se si considerasse l'energia cinetica relativistica anziché quella totale si avrebbe $\nu = \nu_0(\gamma - 1)$ che non può essere mai uguale a ν_1.

Rileviamo che se il punto di partenza è $h\nu_0 = m_0 c^2$, la frequenza non può diminuire quando il corpo si muove (o è visto da un osservatore in moto) perché bisogna aggiungere sempre l'energia cinetica posseduta dal corpo! Quindi $\nu_1 = \frac{\nu_0}{\gamma}$ si deve considerare errata nonostante la dilatazione dei tempi prevista dalla relatività! Anzi si può dire, rafforzando il discorso, che porre $h\nu_0 = m_0 c^2$ è in contrasto con la stessa relatività!

Per superare la difficoltà de Broglie ricorre al "theorem of the harmony of phases": "*A periodic phenomenon is seen by a stationary observer to exhibit the frequency ν_1 that appears*

[4] L. de Broglie, op. cit., pag. 7.
[5] L. de Broglie, op. cit., pag. 9.

constantly in phase with a wave having frequency ν *propagating in the same direction with velocity* $V = \frac{c^2}{v} = \frac{c}{\beta}$”[6].

Supponiamo che a $t = 0$ il fenomeno periodico connesso con il corpo in moto e l’onda ad esso associata siano in fase. All’istante t il corpo ha percorso $x = \beta c t$ e la sua fase è variata di $\nu_1 t = \frac{m_0 c^2}{h}\left(1-\beta^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{\beta c}\right)$.

La fase dell’onda che è associata al corpo in movimento è variata di $\nu\left(t - \frac{\beta x}{c}\right) = \frac{m_0 c^2}{h}\left(1-\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{\beta c} - \frac{\beta x}{c}\right) = \frac{m_0 c^2}{h}\left(1-\beta^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{\beta c}\right)$ e persiste l’accordo di fase.

Nella dimostrazione del teorema suddetto de Broglie usa, però, alternativamente la meccanica classica e quella relativistica: trasformazioni di Galilei e quelle di Lorentz. Ciò è inaccettabile se si vuole fare “buona” teoria!

Usando solo le trasformazioni di Lorentz il teorema non è possibile dimostrarlo!

Infatti si ha: $\nu_1 t = \frac{m_0 c^2}{h}\frac{1}{\gamma}\left(\frac{x}{\gamma \beta c}\right) = \frac{m_0 c^2}{h}\frac{x}{\beta c}\frac{1}{\gamma^2}$ da cui $\nu\left(t - \frac{\beta x}{c}\right) = \frac{m_0 c^2}{h}\gamma\left(\frac{x}{\gamma \beta c} - \frac{\beta x}{c}\right) = \frac{m_0 c^2}{h}\left(\frac{x}{\beta c}\right)\left(1-\gamma\beta^2\right)$ e si ha l’accordo di fase solo per $\gamma = 1$ cioè $\beta = 0$!

L’onda che accompagna la particella si può introdurre usando le sole trasformazioni di Lorentz, e in particolare l’equazione di trasformazione del tempo $t_0 = \gamma\left(t - \frac{\beta x}{c}\right)$, con t_0 = tempo proprio per il corpo in moto. Il fenomeno periodico è rappresentato normalmente da una funzione sinusoidale con argomento $\nu_0 t_0$. Per l’osservatore fisso si ha $\nu_0\left(1-\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(t - \frac{\beta x}{c}\right)$ la cui funzione rappresenta un’onda con frequenza $\nu_0\left(1-\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ e con velocità $V = \frac{c}{\beta}$ nella stessa direzione del moto del corpo (con V > c si ha $m \to \infty$ o immaginaria). E’ un’onda che non porta energia. E’ la “phase wave”.

Usualmente ormai nella maggior parte dei libri o manuali di fisica la relazione di de Broglie viene ricavata considerando l’onda che descrive un fenomeno, con il termine $\sin \omega t$, e applicando a questo le trasformazioni di Lorentz (solo alla componente temporale). Cioè $\sin \omega t$ diventa $\sin \omega\gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) = \sin \omega'\left(t' + \frac{x'}{V}\right)$ con $\omega' = \gamma\omega$, $V = \frac{c^2}{v}$.

La fase sarà uguale a $\varphi = \frac{\gamma\omega x'}{V}$ e quando questa vale 2π si avrà $x' = \lambda$ che porta a $2\pi = \frac{\gamma\omega}{V}\lambda$, cioè $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\gamma\omega v}{c^2}$ e quindi $\gamma v = \frac{c^2}{\omega}k$.

E siccome $p = \gamma m_0 v = \frac{m_0 c^2}{\omega}k = \hbar k$ quest’ultima, avendo considerato $\hbar\omega = m_0 c^2$, è la relazione di de Broglie. Nella sua Nobel Lecture[7] egli la ricava semplicemente con le seguenti uguaglianze: $p = \gamma m_0 v = \frac{h\nu}{c^2}v = \frac{h\nu}{V} = \frac{h}{\lambda}$. Se si considerasse l’energia cinetica relativistica

[6] L. de Broglie, op. cit., pag. 9.

[7] L de Broglie, “*The wave nature of the electron*” Nobel Lecture, December 12, 1929, pag. 249.

$h\nu = m_0c^2(\gamma-1)$ (non si capisce perché bisogna utilizzare quella totale!), si arriverebbe a $p=\frac{h}{\lambda}+m_0v$.

In tutte le derivazioni come quella prima riportata, non viene mai considerata la questione che se la variabile temporale si trasforma secondo le trasformazioni di Lorentz lo stesso deve fare anche la frequenza (effetto Doppler). In questo modo non si arriva alla relazione di de Broglie ma ad una ad essa somigliante.

Infatti, se si applicano le trasformazioni di Lorentz sia al tempo che alla frequenza, $t_0=\gamma(t+\beta x/c)$ e $\omega=\gamma\omega_0(1\pm\alpha\cos\vartheta)$, con $\alpha=\frac{v}{V}$ si ha (usando la stessa notazione di de Broglie):

$\sin\omega_0 t_0$ diventa

$$\sin[\frac{\omega}{\gamma(1\pm\alpha\cos\vartheta)}\cdot\gamma\left(t+\frac{vx}{c^2}\right)]=\sin\frac{\omega}{(1\pm\alpha\cos\vartheta)}\left(t+\frac{vx}{c^2}\right)=\sin a\omega\left(t+\frac{vx}{c^2}\right)$$

con $a=(1\pm\alpha\cos\vartheta)^{-1}$

Si avrà, allora, $\varphi=\frac{a\omega vx}{c^2}$ e quando questa vale 2π si avrà $x=\lambda$ che porta a $2\pi=\frac{a\omega v}{c^2}\lambda$ e quindi $k=\frac{a\omega v}{c^2}$ da cui $v=\frac{c^2}{a\omega}k$.

Se si pone $p=\gamma m_0 v$ utilizzando il risultato trovato si ha $p=\frac{\gamma m_0c^2}{a\omega}k$ ed essendo anche $\omega=\frac{\gamma m_0c^2}{\square}$ si ottiene $p=\frac{\square}{a}k$, che non è la relazione di de Broglie! Si ottiene invece $p=\frac{h}{a\lambda}$ o la più riconosciuta $\lambda=\frac{h}{ap}$.

Se si considera $\theta=0$, come deve essere, visto che si sta considerando tutto in una sola direzione, diventa $a=\frac{1}{1\pm\alpha}$. La relazione di de Broglie si scriverà: $\lambda=\frac{h(1\pm\alpha)}{p}$. Con le considerazioni fatte all'inizio, bisognerà scegliere il segno positivo visto che la frequenza deve crescere per il semplice fatto che bisogna aggiungere l'energia cinetica dovuta al moto a quella iniziale $h\nu_0$.

Anche restando nell'ambito della meccanica classica è possibile ricavare una relazione simile a quella di de Broglie.

L'ipotesi di de Broglie si può scrivere: $\gamma m_0c^2-m_0c^2=h\nu-h\nu_0$ cioè $\nu-\nu_0=\frac{E_{cin}}{h}$.

Con l'espressione classica dell'energia cinetica si ha: $\nu-\nu_0=\frac{p^2}{2m_0h}$. Usando la formula di trasformazione della frequenza (ancora classica!) per l'effetto Doppler si ottiene: $\nu-\frac{\nu}{1+\alpha}=\frac{p^2}{2m_0h}$ da cui $\nu\frac{\alpha}{1+\alpha}=\frac{p^2}{2m_0h}$. Considerando sempre $\nu\lambda=V$ si ha $\frac{v}{\lambda(1+\alpha)}=\frac{p^2}{2m_0h}$ e quindi $\lambda=\frac{2h}{(1+\alpha)p}$, che si può considerare la relazione di de Broglie in ambito classico! Lo stesso si otterrebbe partendo da $h\nu=m_0c^2+\frac{p^2}{2m_0}=\frac{pc^2}{v}+\frac{pv}{2}$.

Se si fosse usata l'altra espressione per l'effetto Doppler ($\nu_0 = \nu(1-\alpha)$) si sarebbe ottenuto addirittura $\lambda = \frac{2h}{p}$! Lo stesso risultato si ricava ponendo $h\nu = \frac{pv}{2}$ e $\nu\lambda = v$. Se invece si fosse posto $\nu\lambda = V$ si sarebbe ottenuto $\lambda = \frac{2h}{p\alpha}$.

Dunque la relazione di de Broglie non è una relazione tipicamente relativistica: anche restando nell'ambito della cosiddetta fisica classica è possibile ottenere una relazione tra la quantità di moto di una particella e la lunghezza d'onda di un'onda ad essa associata. Le varie formule ottenute ci richiamano costantemente l'idea fondamentale che in scienza più che le formalizzazioni teoriche sono importanti i modelli con i quali si vuole operare!

La relazione di de Broglie, $\lambda = \frac{h}{mv}$, viene scritta solo nel settimo capitolo della sua tesi, a pag. 61 (su 72). "*If the velocities are low enough to justify ignoring relativistic terms, the wave length of a wave moving with an atom whose velocity is v, would be*"[8]: $\lambda = \frac{c/\beta}{m_0 c^2 / h} = \frac{h}{m_0 v}$.

Coerentemente, però, bisognerebbe scrivere $\lambda_0 = \frac{\frac{c}{\beta}}{\frac{m_0 c^2}{h}} = \frac{h}{m_0 v}$ da cui, avendo dalla relatività $m_0 = \frac{m}{\gamma}$ e $\lambda_0 = \gamma\lambda$, si ha $\lambda = \frac{h}{mv}$. Dunque la famosa relazione di de Broglie si può scrivere sia come $\lambda_0 = \frac{h}{m_0 v}$ che $\lambda = \frac{h}{mv}$ (la prima si potrebbe considerare con grandezze classiche e l'altra, per così dire, con grandezze relativistiche).

Molti sono gli esperimenti che sono stati approntati per verificare la bontà della relazione di de Broglie. Il più celebre è quello di Davisson e Germer[9] (del 1927), che sembra verificarla e che, di fatto, la consacrò.

Si fa notare solo che l'elaborazione dei dati in tale esperimento viene fatta usando l'espressione classica dell'energia cinetica, cioè a energie non relativistiche, per poter ottenere lunghezze d'onda confrontabili con le dimensioni interatomiche di un reticolo cristallino. Dunque la prima verifica della relazione di de Broglie, che si considera prettamente relativistica, viene provata sperimentalmente solo per "valori" classici!

Su questo punto molto interessanti sono le considerazioni riportate nel lavoro di H.R. Brown e R.d.A. Martins[10] (1984), che, oltre a riportare gran parte degli esperimenti fatti con i relativi risultati ed errori, fanno notare banalmente che le risultanze sperimentali non possono verificare contemporaneamente l'espressione classica della relazione e quella relativistica! (Viene effettuato il confronto tra le due formule con il rapporto dato da $\lambda_c / \lambda_r = [1 + eP/(2m_0 c^2)]^{1/2}$, essendo $\lambda_c = h/(m_0 v)$ e $\lambda_r = h/mv$, di fatto quindi ancora con approssimazioni, quando sono proprio queste a discriminare eventualmente tra i due modelli!). Loro propendono chiaramente per quella relativistica, in modo categorico, riportando i risultati degli esperimenti di S. Kikuchi (1928), E. Rupp (1931) e soprattutto di J. V. Hughes (1935). Ma anche negli esperimenti più recenti, piuttosto complessi, compresi quelli del 1974 di Merli, Missiroli e Pozzi[11], del 1989 di Tonomura[12], di Gahler

[8] L. de Broglie, op. cit., pag. 61.

[9] C. Davisson, L.H. Germer, Phys. Rew. 30, 705 (1927).

[10] H.R. Brown, R de A. Martins, Am. J. Phys., 52, 1130 (1984).

[11] Merli, P. G., Missiroli, G. F., and Pozzi, G.: "*Electron Interferometry with the Elmiskop 101 Electron Microscope*", Journal of Physics E: Scientific Instruments, 7, (1974) pp. 729.732. Merli, P. G., Missiroli, G. F., and Pozzi, G.: "*On the Statistical Aspect of Electron Interference Phenomena*", Am. J. Phys. 44, (1976a) pp. 306.307.

e Zeilinger[13] e di Carnal e Mlynek[14] del 1991, l'analisi dei dati viene fatta usando l'espressione classica dell'energia cinetica e si conclude che sono in ottimo accordo con la relazione di de Broglie!

Bisogna notare, infine, che quando si opera con energie grandi, la lunghezza d'onda data dalla relazione di de Broglie (classica o relativistica!) diventa troppo piccola e così aumentano gli errori nelle osservazioni e la loro analisi diventa più complessa!

Dunque la relazione di de Broglie, da tutti considerata importantissima (lo fanno tutti i libri, a tutti i livelli) sia per la sintesi che opera tra la teoria dei quanti e la relatività ristretta sia per il suo ruolo fondante nella moderna meccanica quantistica, presenta qualche dubbio sia per la sua deduzione che per la sua verifica sperimentale. Ma d'altra parte è lo stesso de Broglie a concludere la sua tesi di dottorato con la frase: "*I have left the definitions of phase waves and the periodic phenomena for which such waves are a realization, as well as the notion of a photon, deliberately vague. The present theory is, therefore, to be considered rather tentative as Physics and not an established doctrine*"[15].

[12] A. Tonomura, J. Endo, T. Matsuda, T. Kawasaki and H. Ezawa, "*Demonstration of Single-Electron Buildup of an Interference Pattern,*"Amer. J. Phys. 57 (1989) pp.117-120.

[13] R.Gähler, A.Zeilinger, "*Wave-Optical Experiments with Very-Cold Neutrons*", Am.J.Phys. **59**, 316 (1991)

[14] O**.**Carnal, J. Mlynek "*Young's double-slit experiment with atoms: A simple atom interferometer*" Phys. Rev. Lett. 66, (1991), 2689 – 2692.

[15] L. de Broglie, op. cit., pag. 72.