# LA “RELATIVITA’ RISTRETTA” IN MECCANICA CLASSICA.*

**Pietro Di Mauro**
*(Liceo Scientifico “E. Fermi” – Paternò (CT), INFN - Sezione di Catania, Associazione Culturale “ S. Notarrigo” – Mondotre / La Scuola Italica)*

* in *Atti del XLIX Congresso Nazionale AIF, Salerno 2010 - La Fisica nella Scuola, Bollettino trimestrale dell’AIF, Anno XLIV – Supplemento al n. 2 aprile – giugno 2011, pp. 17 – 23, Monotipia Cremonese (CR).*

**Abstract:** Se per trovare la velocità di un corpo si usa la luce come mezzo per conoscerne la posizione, si ottiene una formula che contiene la velocità della luce come limite superiore e che ci permette di trovare la legge di composizione delle velocità simile a quella data dalla relatività ristretta. Sarà possibile trovare anche le grandezze fisiche misurate in modo indiretto e confrontarle con quelle date dalla meccanica classica e da quella relativistica. Inoltre dalle relazioni che legano le grandezze introdotte è pensabile ricavare le “trasformazioni” generali che ci permettono eventualmente di passare da un sistema a un altro in moto traslatorio uniforme.

In un mio lavoro[1] del 2002, e poi ripreso nel 2007[2], ho sostenuto alcune tesi.

1. La definizione ordinaria di velocità (in una dimensione $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$) è sostanzialmente l’equazione per lo spazio della trasformazione cosiddetta di Galilei, e viceversa la trasformazione di Galilei è la definizione classica di velocità.

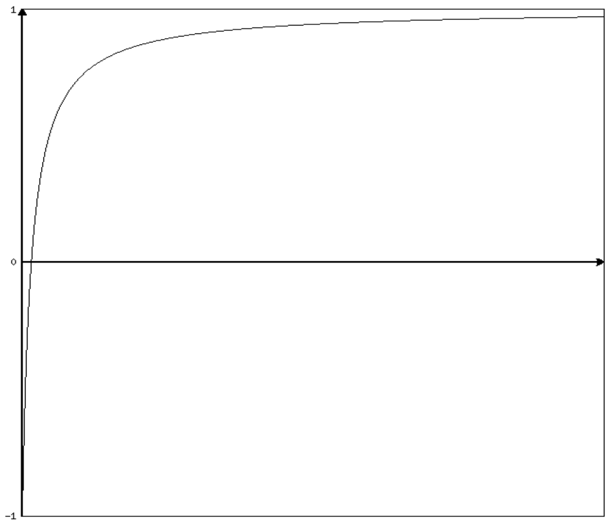
2. Se, per una nuova meccanica, è proprio la trasformazione di Galilei che deve essere modificata (per rendere conto della supposta costanza della velocità della luce), non può lasciarsi invariato il modo di conoscere la velocità. E inoltre, in tutti i lavori sulla relatività si suppone sempre che la velocità di un sistema (o di un corpo) sia nota sempre, senza mai sapere come!

3. Non si può affermare, come succede sempre in relatività, che le misure di spazio e tempo, per osservatori in moto relativo uniforme, dipendono dalla velocità quando questa è definita proprio con spazio e tempo (si chiude un circolo vizioso!). Anzi, proprio la definizione di velocità si potrebbe considerare come possibile discriminante tra le varie trasformazioni possibili per passare da un sistema ad un altro (questo è, più recentemente, uno dei modi che viene utilizzato per introdurre la relatività ristretta [3]).

4. La velocità rispetto ad un osservatore di un corpo individuato da un raggio di luce (segnale, “mezzo” per osservare), che si muove sempre alla stessa velocità $c$ rispetto all’osservatore stesso, si può ottenere con la formula $v = c\left(\frac{\Delta t - \Delta t_0}{\Delta t + \Delta t_0}\right) = c\left(\frac{f-1}{f+1}\right) = cy$, con $f = \frac{\Delta t}{\Delta t_0}$ ($\Delta t_0$ è l’intervallo tra gli istanti iniziali considerati per il lancio dei raggi di luce $\tau_2 - \tau_1$ e $\Delta t$ è l’intervallo tra gli istanti finali di ricezione $t_2 - t_1$ dello stesso segnale dopo la riflessione sul corpo) ed $f$ si possono considerare i fattori di velocità, oggi utilizzati in alcuni recenti lavori[4]. Si introduce, così, semplicemente il fatto che per osservare la posizione di un corpo e il suo cambiamento, si ha bisogno di un “mezzo”, in questo caso il segnale luminoso caratterizzato dalla velocità costante $c$, supposta finita.

5. Se la velocità di propagazione del segnale, che ci permette di conoscere la posizione di un corpo in un certo istante, per poterne definire poi tutte le altre grandezze, fosse ritenuta istantanea (cioè tendente all'infinito) si tornerebbe alla meccanica di Galilei e Newton[5].

Dunque, all'interno della meccanica di Galilei e Newton bisogna inserire il "fatto" che la misura delle posizioni e dei tempi per un corpo è eseguita, quasi sempre, in modo indiretto, usando un segnale di comunicazione. Qui si sta utilizzando proprio il segnale caratterizzato dalla *c* (ritenuta, in un'ipotesi eventualmente tutta da verificare, indipendente dal moto dei corpi[6]). La velocità di un corpo (o, usando il linguaggio della relatività, di un sistema) che sempre aprioristicamente viene data per conosciuta (ribadiamo senza sapere come!), si può dare, allora, con la formula scritta prima. Riportata in grafico la *y* è, per la parte positiva (avendo *f* sull'asse delle ascisse):




In un ulteriore lavoro del 2009[7] si è fatto notare che nella dimostrazione per ottenere la formula della velocità, fatta nel 2002, non è possibile distinguere tra il caso in cui si trova $v$ (velocità rispetto all'osservatore considerato fermo) o $v \pm u$ (rispetto a un osservatore già in moto rispetto ad un altro). In qualunque caso tale velocità bisogna ottenerla con la stessa formula data prima (restando quindi inferiore a *c*). Allora, nel caso di velocità relative bisogna che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

1. $f_1 > 1, \quad f_2 > 1 \;\Rightarrow\; f > 1$; (anche $0 < f_1 < 1, \quad 0 < f_2 < 1 \;\Rightarrow\; 0 < f < 1$)
2. $f_1 \to \infty$ (oppure $f_2 \to \infty$) $\Rightarrow\; f \to \infty$;
3. $f_1 = 1$ (oppure $f_2 = 1$) $\Rightarrow\; f_2 = f$ (oppure $f_1 = f$).

Le tre condizioni date implicano, semplicemente, che l'unica relazione possibile tra $f_1$, $f_2$ ed $f$ è $f = f_1 \times f_2$, cioè i fattori di velocità si devono comporre moltiplicandoli tra loro!

Se poi si pone $f = \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$, $f_1 = \frac{1+\beta}{1-\beta}$, $f_2 = \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$ dove $\alpha = \frac{w}{c}$, $\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = \frac{u}{c}$ con la condizione di prima ($f_1 \times f_2 = f$) si ricava la legge di composizione delle velocità: $\alpha = \frac{\beta+\gamma}{1+\beta\gamma}$, che chiaramente è possibile ricavare anche nel caso di velocità negative.

Scritta con le velocità diventa $w = \dfrac{v+u}{1+\frac{vu}{c^2}}$ , che è quella tipica della relatività ristretta se, come si fa sempre, si considera *u* la velocità di un corpo rispetto a un sistema in moto con velocità *v* rispetto a un altro osservatore che assegnerà, quindi, al corpo la velocità *w* (purché tutte nella stessa direzione e nello stesso verso).

La legge di composizione trovata si può scrivere[8] $w = \frac{v+u}{1+kvu}$, con $k = \frac{1}{c^2}$, e quindi, ancora una volta, si ritrova che se $c \to \infty$ la legge di composizione si riduce a quella galileiana!

Si possono trovare tutte le altre grandezze necessarie per descrivere il moto dei corpi scrivendo, magari, la formula della velocità data prima in modo più semplice.

La formula è $v = c\left(\frac{t-t_0}{t+t_0}\right)$, avendo posto simbolicamente $\Delta t = t; \Delta t_0 = t_0$ (con $t_0 \neq 0$ e costante). Potendo considerare sempre $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = t_1 = t_0$ e $t_2 = t$ (cioè nell'istante in cui si riceve il ritorno del primo segnale parte il secondo), la formula della velocità, diventa la più semplice: $v = c\left(1 - \frac{2t_0}{t}\right) = c\left(1 - \frac{1}{f'}\right)$, avendo posto $f' = \frac{t}{2t_0}$ Si ha, con $t_0 \neq 0$ e costante, $t = t_0 \Rightarrow v = -c$ e $t \to \infty \Rightarrow v = c$. La velocità sarà nulla, $v = 0$, se $t = 2t_0$. Si avrà una velocità positivo se $t > 2t_0$, negativa se $t < 2t_0$. Un corpo si muoverà di moto rettilineo uniforme ($v_2 = v_1$, con $v_1 = c\left(1 - \frac{2t_0}{t_1}\right)$, $v_2 = c\left(1 - \frac{2t_0}{t_2}\right)$) se $\frac{t_0}{t_1} = \frac{t_1}{t_2}$. E quindi $\Delta v = v_2 - v_1 = 2c\left(\frac{t_0}{t_1} - \frac{t_1}{t_2}\right)$. E così si può definire l'accelerazione media: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 2c\frac{\left(t_0 t_2 - t_1^2\right)}{t_1 t_2 \left(t_2 - t_1\right)}$. L'accelerazione istantanea si può ricavare come la derivata della velocità rispetto al tempo. La formula della velocità trovata ci fornisce la velocità di un corpo in un certo istante e dunque la derivata rispetto al tempo *t* della formula trovata è $a = c\frac{2t_0}{\left(t+t_0\right)^2}$; con il fattore di velocità diventa $a = c\frac{2}{t_0(f+1)^2}$, e, con la scelta fatta per semplicità degli istanti iniziali, $a = c\frac{2t_0}{t^2}$. Il risultato trovato significa, coerentemente con le nostre ipotesi, che man mano che la velocità si avvicina a quella della luce la sua variazione nel tempo, cioè l'accelerazione, diventa sempre più piccola, al limite tendente a zero, proprio per non poter superare la velocità della luce!

Con la nuova definizione di velocità si può definire anche la relativa quantità di moto di un corpo dotato di massa *m*, misurata a riposo, avente una data velocità. La quantità di moto si scriverà allora $p = mv = mc\left(\frac{\Delta t - \Delta t_0}{\Delta t + \Delta t_0}\right) = mc\left(\frac{f-1}{f+1}\right)$. Chiaramente si potrà definire partendo anche da $v = c\left(\frac{t-t_0}{t+t_0}\right)$ o più semplicemente da $v = c\left(1 - \frac{2t_0}{t}\right)$. Si avrà allora $p = mc\left(1 - \frac{2t_0}{t}\right)$ e dunque $\Delta p = p_2 - p_1 = 2mc\left(\frac{t_0}{t_1} - \frac{t_1}{t_2}\right)$. Coerentemente, se il moto è rettilineo uniforme, si avrà $\Delta p = 0$. La variazione della quantità di moto nel tempo ci potrà fornire la forza applicata al corpo per variare la sua velocità ottenendo $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = 2mc\frac{\left(t_0 t_2 - t_1^2\right)}{t_1 t_2 \left(t_2 - t_1\right)}$. Se vogliamo trovare poi quella istantanea bisognerà, come prima, farne il limite per $\Delta t \to 0$. Per fare ciò possiamo calcolare semplicemente la derivata, rispetto a *t*, della quantità di moto prima definita. Si ottiene

$\frac{dp}{dt} = mc\frac{2t_0}{(t+t_0)^2} = mc\frac{2}{t_0(f+1)^2}$ , oppure, più semplicemente $\frac{dp}{dt} = mc\frac{2t_0}{t^2}$ .

La nuova definizione di quantità di moto si discosta da quella usata in relatività ristretta (ottenuta per continuare a far valere il principio di conservazione della quantità di moto per due sistemi in moto traslatorio uniforme tra loro, applicando le già trovate trasformazioni di Lorentz). Infatti, mentre quella man mano che la velocità del corpo si avvicina alla velocità della luce tende all'infinito questa, nelle stesse condizioni tende da una parte, al valore limite, finito, $p = mc\left(1-\frac{2t_0}{t}\right) \rightarrow mc$ e dall'altra, per $t \rightarrow 0$, $p = mc\left(1-\frac{2t_0}{t}\right) \rightarrow -\infty$ .

Come si fa normalmente oggi nella meccanica del punto materiale, non più quella di Galilei e Newton bensì quella di Mach, Eulero e Lagrange, è possibile definire, anche, l'energia cinetica posseduta da un corpo e le sue variazioni.

Per la variazione di energia cinetica, quando il corpo passa da una velocità ad un'altra, se è data per definizione sempre da $E = \int v dp$, con $dp = mc\frac{2t_0}{(t+t_0)^2}dt$, si ottiene $E = \int_{t_1}^{t_2} v dp = 2mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t-t_0)t_0}{(t+t_0)^3}dt = mc^2\left[\frac{2t_0t_1}{(t_1+t_0)^2} - \frac{2t_0t_2}{(t_2+t_0)^2}\right]$ (chiaramente si ottiene lo stesso se si fanno i calcoli con i fattori velocità $f$ ).

Con la formula semplificata la variazione di energia cinetica per un corpo che, per esempio, da una velocità nulla passa a una velocità finita $v$ sarà data da $E = \int v dp = 2mc^2 \int \frac{t_0}{t^2}\left(1-\frac{2t_0}{t}\right)dt = mc^2\left(\frac{2(t_0^{\,2} - t_0 t)}{t^2} + \frac{1}{2}\right)$. Introducendo $f'$, come definito prima, si ottiene $E = mc^2\frac{(f'-1)^2}{2f'^2}$. E' possibile applicare anche a quest'ultime relazioni trovate le stesse considerazioni fatte prima per la accelerazione e per la quantità di moto.

In queste considerazioni va ribadito il fatto che lo spazio percorso dal corpo e il tempo impiegato da questo vengono misurate dall'osservatore che determina la velocità del corpo stesso direttamente con gli strumenti in suo possesso. E dunque, un solo osservatore misurerà spazio e tempo sia con metodo diretto che con metodo indiretto, utilizzando i segnali luminosi, ottenendo sempre le stesse misure senza poter introdurre dilatazioni o contrazioni varie ma con la sola impossibilità di superare la velocità del segnale utilizzato! (cfr. articolo nota 1).

Nel lavoro del 2002 scrivevo[9]: "*In relatività però si considerano sempre due osservatori che descrivono lo stesso evento e che dovrebbero scambiarsi le conoscenze delle grandezze misurate da ciascuno. Questo è richiesto: l'impossibile confronto tra osservazioni fatte di un evento (di un corpo, di un sistema) da due osservatori in moto tra loro. E questi per accordarsi sui segnali da lanciare (simultaneità), per confrontare le loro misure, otterranno misure "relative", "apparenti" (contrazione, dilatazione, etc... e i loro paradossi) dipendenti dalle convenzioni adottate.*

*Il discorso sulle possibili trasformazioni da usare per passare da un sistema (osservatore) ad un altro nasce proprio dalla pretesa di dover confrontare le misure fatte da un osservatore O di un evento E e quelle fatte sullo stesso evento da un altro osservatore O' (supposto in moto relativo uniforme rispetto ad 0) e quindi conoscere grandezze di E rispetto a O' come "viste" da O (o viceversa). Senza la pretesa di tale impossibile confronto ciascun osservatore potrà fare le sue misure senza dover invocare nessuna trasformazione!*"

Premesso questo, a partire dalla legge di composizione, volendo si può ricavare la trasformazione che permette, eventualmente, di passare da un sistema a un altro[10]. Si ricava:

$$\begin{cases} x = \varphi\,(x' \pm vt') \\ t = \varphi\,(t' \pm \dfrac{vx'}{c^2}) \end{cases}$$

Restando nell'ambito della cosiddetta fisica classica, le più generali trasformazioni lineari che lasciano invariata l'equazione di un segnale che si propaga con la velocità costante *c*, e che soddisfano anche il principio di relatività classico, sono quelle da noi trovate[11]:

$$\begin{cases} x = ax' \pm \sqrt{a^2 - 1}\cdot ct' \\ t = \pm\sqrt{a^2 - 1}\cdot \dfrac{x'}{c} + at' \end{cases} \quad \text{(con } a \text{ una qualunque funzione).}$$

In questa trasformazione lineare è proprio la definizione di velocità ad operare la distinzione tra le infinite possibilità.

Allora, se si vuole imporre per due osservatori in moto relativo tra loro con velocità costante l'invarianza dell'equazione dell'onda, cioè che per entrambi la velocità della luce abbia lo stesso valore indipendente dal loro stato di moto, si può usare la trasformazione generale riportata prima e, con la definizione di velocità proposta e le solite convenzioni, la legge di composizione delle velocità diventa:

$$w = \frac{u \pm \dfrac{\sqrt{a^2 - 1}}{a}c}{1 \pm \dfrac{\sqrt{a^2 - 1}}{a}\dfrac{u}{c}} \ ,$$

avendo per la velocità del sistema:

$$v = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a}c\,.$$

Con la scelta degli istanti iniziali fatta, per semplicità, nella formula della velocità, la relazione tra questa e il parametro *a* introdotto è:

$$a = \pm\frac{t}{2\sqrt{t_0 t - t_0{}^2}} = \pm\frac{f'}{\sqrt{2f' - 1}}\,,$$

(per $v = 0$, che vuol dire $t = 2t_0$, ci fornisce $a = 1$, come ci aspettiamo).

La trasformazione diventa quindi:

$$\begin{cases} x = a\left(x' \pm vt'\right) = \pm\dfrac{f'}{\sqrt{2f' - 1}}\left[x' \pm \left(1 - \dfrac{1}{f'}\right)ct'\right] \\ t = a\left(t' \pm \dfrac{vx'}{c^2}\right) = \pm\dfrac{f'}{\sqrt{2f' - 1}}\left[t' \pm \left(1 - \dfrac{1}{f'}\right)\dfrac{x'}{c}\right] \end{cases}$$

e la sua inversa:

$$\begin{cases} x' = a\left(x \mp vt\right) = \pm \dfrac{f'}{\sqrt{2f'-1}}\left[x \mp \left(1-\dfrac{1}{f'}\right)ct\right] \\ t' = a\left(t \mp \dfrac{vx}{c^2}\right) = \pm \dfrac{f'}{\sqrt{2f'-1}}\left[t \mp \left(1-\dfrac{1}{f'}\right)\dfrac{x}{c}\right] \end{cases}.$$

Adesso, con la stessa tecnica utilizzata nella relatività del confronto tra grandezze è possibile scrivere $l = \dfrac{l_0}{a} = \dfrac{\sqrt{2f'-1}}{f'} l_0$, essendo $l_0$ la "lunghezza propria" di un'asta a riposo nel sistema che si muove con velocità *v* rispetto all'osservatore cosiddetto "fisso" e l'analoga per il tempo $t = at_0 = \dfrac{f'}{\sqrt{2f'-1}} t_0$ (avendo scelto il solo valore positivo del parametro *a*).

Con questa trasformazione e con la nuova definizione di velocità, si possono ottenere, quindi, equazioni formalmente identiche a quelle fornite dalla relatività ristretta, quando si considerano due osservatori che vogliono accordarsi sulle misure fatte dello stesso evento.

Si può continuare e se si vuole, come si fa sempre in relatività ristretta, che valga per ciascun osservatore il principio di conservazione della quantità di moto, usando le trasformazioni e la definizione di velocità dati, si ottiene $p = amv = mc\dfrac{f'-1}{\sqrt{2f'-1}}$, da cui $dp = m_0 c \dfrac{f'}{\left(2f'-1\right)^{\frac{3}{2}}} df'$, e per la variazione di energia cinetica $E = mc^2\left(\dfrac{f'}{\sqrt{2f'-1}} - 1\right)$.

Eventualmente, allora, si tratterebbe di confrontare le relazioni trovate e quelle fornite nell'ambito della relatività ristretta con i rispettivi risultati sperimentali accettati. Ma, come abbiamo più volte sostenuto, qualunque esperimento non può riuscire a discriminare tra le equazioni proposte![12]

Nel mio ultimo intervento al Congresso Nazionale della SIF del 2007 concludevo[13]: "*Ma, in tutti gli esperimenti che vengono portati a supporto della teoria non ci sono mai due osservatori, due rivelatori! L'osservatore raccoglie le misure, rispetto a quelle che un ipotetico osservatore solidale con l'evento (a riposo rispetto a questo) gli assegnerà. In pratica si ha sempre la necessità di conoscere le misure delle grandezze in gioco a riposo, per confronto diretto, per altre vie… [!?] e poi misurare le eventuali differenze quando queste vengono considerate in moto! Questo è il ruolo assegnato alle trasformazioni per passare da un sistema ad un altro!*"

E infine, nello stesso intervento, chiosavo: "*Dunque, per concludere, eventualmente il fatto nuovo che bisogna aggiungere alla meccanica di Galilei e Newton è che anche le grandezze fondamentali, quali la velocità, possono e devono essere misurate non solo per confronto diretto con l'unità di misura, ma anche utilizzando la luce, che qui si suppone avente velocità costante, come segnale per "vedere" i corpi che si vogliono descrivere*".

[1]P. Di Mauro: *"Reale e apparente: le trasformazioni di Lorentz e il concetto di velocita'"* in Mondotre – La Scuola Italica, Anno IV, Numero 4, dicembre 2002, Nuova serie, pp. 17 – 40.
www.lascuolaitalica.it/nsIV2.htm.

[2] P. Di Mauro: *"Velocità e trasformazioni",* Comunicazione al XCIII CONGRESSO NAZIONALE S.I.F. – PISA 2007, www.lascuolaitalica.it:.

[3] Cfr. J.-M. Lévy-Leblond: *"Speed(s)"*, Am. J. Phys. 48, 345 (1980).

[4] Cfr. A. T. Wilson: "*Using ordinary multiplication to do relativistic velocity addition"* arXiv:physics/0611192v1 21 Nov 2006.

[5] Cfr., tra gli altri, A. Sen: "*How Galileo could have derived the special theory of relatività*", Am. J. Phys. 62, 157 (1994).

[6] Cfr. tra i lavori che si occupano dell'argomento, tra gli ultimi, J. Franklin: "*The invariance of speed of light*", arXiv:1002.3968v1 [physics.gen-ph] 21 Feb 2010; A. Rouf: *"On the costancy of light speed"*
arXiv:0911.2878v1 [physics.gen-ph] 15 Nov 2009 e relative references; E. D. Greaves et al: *"A one-way speed of light experiment"*, Am. J. Phys. 77, 894 (2009) e relativi commenti successivi.

[7] P. Di Mauro: "*Una rilettura del metodo scientifico di Galilei. Il caso della composizione delle velocita'",* comunicazione al XLVIII CONGRESSO NAZIONALE AIF – Mantova 2009, in stampa.

[8] Cfr., tra gli altri, N.D. Mermin: *"Relativity without light"*, Am. J. Phys. 52, 119 (1984).

[9] Op. cit. nota 1, p. 26.

[10] B. Rothenstein, G. Eckstein: *"Lorentz transformations directley from the speed of light"*, Am. J. Phys. 63, 1150 (1995)

[11] P. Di Mauro, S. Notarrigo: *"Sull'invarianza delle equazioni di Maxwell"*, Atti del XVI Congresso Nazionale di Storia della Fisica e dell'Astronomia, Como 1996 (a cura di P. Tucci), Gruppo di lavoro per le Celebrazioni Voltiane, CNR, maggio 1997,(MI),p.335; anche http://albinoni.brera.unimi.it/Atti-Como-1996 e www.lascuolaitalica.it/ pubbl5.htm; cfr. P. B. Pal: "*Nothing but Relativity*", arXiv:physics/0302045v1 [physics.class-ph] 13 Feb 2003 e relativi riferimenti.

[12] P. Di Mauro: *"<<Massa-energia relativistica>> e questioni legate ad essa"*, in Atti del XXVII Congresso Nazionale di Storia della Fisica e dell'Astronomia Bergamo, 20-23 giugno 2007. Quaderni del CE.R.CO – Guaraldi, 2010, pp. 225 – 235, e relativi riferimenti; Comunicazione al XCII Congresso Nazionale SIF, Torino 2006.

[13] Op. cit. nota 2.